TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

FJÄRDE ÅRGÅNGEN

1920—1921

STOCKHOLM. ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM. ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1920—21

Något om den pytagoreiska ekvationen.

Av ARVID LINDHAGEN.

För att finna den fullständiga lösningen till ekvationen

$$x^2+y^2=z^2$$

som är en homogen diofantisk ekvation av andra graden med tre obekanta och kallas den pytagoreiska på grund av sitt samband med det pytagoreiska teoremet, har man flera metoder, bland dem följande. Ekvationen skrives under formen

$$(z+x)(z-x)=y^2$$

eller

$$\frac{z+x}{y}=\frac{y}{z-x}$$

och dessa båda kvoter sättas var för sig $=\frac{a}{b}$, där a och b beteckna två godtyckliga tal. Härigenom erhållas ekvationerna

$$\frac{z+x}{y}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{z-x}{y}=\frac{b}{a}$$

genom vilkas addition och subtraktion framgår

$$\frac{2z}{y}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$\frac{2x}{y}=\frac{a^2-b^2}{ab}$$

eller

$$\frac{x}{a^2-b^2}=\frac{y}{2ab}=\frac{z}{a^2+b^2}.$$

Talen x, y och z äro alltså proportionella mot (a^2-b^2), $2ab$ och (a^2+b^2). Om proportionalitetsfaktorn betecknas med k, blir alltså

$$x = k \cdot (a^2 - b^2)$$
$$y = k \cdot 2ab$$
$$z = k \cdot (a^2 + b^2).$$

Då den givna ekvationen är homogen, kan proportionalitetsfaktorn bortlämnas; och den fullständiga lösningen kan anses vara

$$x = a^2 - b^2$$
$$y = 2ab$$
$$z = a^2 + b^2$$

då det är självklart, att ekvationen även satisfieras av tal, som äro k gånger så stora.

Av särskilt intresse äro heltalslösningarna, d. v. s. de specialfall, då x, y och z äro positiva hela tal. Dessa erhållas, då a och b äro positiva hela tal och $a > b$. Vill man utesluta sådana lösningar, där x, y och z ha en gemensam faktor, så måste a och b vara relativa primtal; de få alltså icke båda vara jämna tal. Men de få icke heller båda vara udda tal, ty i sådant fall skulle x, y och z bli jämna tal och alltså ha en gemensam faktor. I vidstående tabell angivas alla lösningar genom en- och tvåsiffriga tal, som äro relativa primtal; de äro 16 till antalet.

N:o	b	a	x	y	z
1	1	2	3	4	5
2	1	4	15	8	17
3	1	6	35	12	37
4	1	8	63	16	65
5	2	3	5	12	13
6	2	5	21	20	29
7	2	7	45	28	53
8	2	9	77	36	85
9	3	4	7	24	25
10	3	8	55	48	73
11	4	5	9	40	41
12	4	7	33	56	65
13	4	9	65	72	97
14	5	6	11	60	61
15	5	8	39	80	89
16	6	7	13	84	85

Ställa vi oss den uppgiften *att söka alla rätvinkliga heltalstrianglar med en given katet*, så kan den inom vissa gränser lösas med tillhjälp av tabellen, men generellt på följande sätt. Om den givna kateten betecknas med y, hypotenusan med z och den andra kateten med x, så är

$$(z + x)(z - x) = y^2.$$

Om då y^2 upplöses i två olika stora faktorer u och v

($u > v$), som antingen båda äro jämna tal eller båda udda tal, så är

$$z + x = u$$
$$z - x = v$$

varav

$$z = \frac{u+v}{2}; \quad x = \frac{u-v}{2}.$$

Om y^2 på m olika sätt kan upplösas i sådana faktorer, så finnes det m lösningar till uppgiften.

Ex. 1. $y = 7; \quad y^2 = 49 = 1 \cdot 49.$

Emedan y^2 blott på ett enda sätt kan uppdelas i faktorer av angiven beskaffenhet, så finnes det en enda rätvinklig heltalstriangel med en katet $= 7$. Hypotenusan blir $\frac{49+1}{2} = 25$, den andra kateten $\frac{49-1}{2} = 24$. Triangeln återfinnes i tabellen såsom N:o 9.

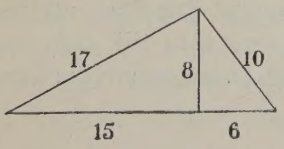
Ex. 2. $y = 8; \quad y^2 = 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16.$

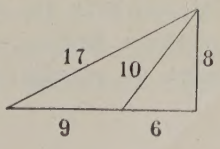
Emedan uppdelningen i faktorer här kan ske på 2 olika sätt, finnas 2 lösningar. De äro

$$x_1 = \frac{32-2}{2} = 15 \qquad x_2 = \frac{16-4}{2} = 6$$
$$y = 8 \qquad y = 8$$
$$z_1 = \frac{32+2}{2} = 17 \qquad z_2 = \frac{16+4}{2} = 10$$

(Tab. N:o 2). (Tab. N:o 1).

Av dessa båda trianglar kan man på två olika sätt bilda en s. k. *rationell* triangel d. v. s. så beskaffad att ytan, höjderna samt de vidskrivna, inskrivna och omskrivna cirklarnas radier uttryckas genom rationella tal.





Den ena triangelns sidor bliva

$$z_1=17;\quad z_2=10;\quad x_1+x_2=21$$

och den andras

$$z_1=17;\quad z_2=10;\quad x_1-x_2=9.$$

Ex. 3. $y=12;\quad y^2=144=2\cdot 72=4\cdot 36=6\cdot 24=8\cdot 18.$

Emedan uppdelningen i faktorer här kan ske på 4 olika sätt, finnas 4 lösningar. De äro:

$x_1=35$	$x_2=16$	$x_3=9$	$x_4=5$
$y=12$	$y=12$	$y=12$	$y=12$
$z_1=37$	$z_2=20$	$z_3=15$	$z_4=13$
(Tab. N:o 3).	(Tab. N:o 1).	(Tab. N:o 1).	(Tab. N:o 5).

Av dessa 4 rätvinkliga trianglar kan man bilda 12 rationella trianglar. Deras sidor bliva

1) $z_1=37$	2) $z_1=37$	3) $z_1=37$	4) $z_1=37$
$z_2=20$	$z_2=20$	$z_3=15$	$z_3=15$
$x_1-x_2=19$	$x_1+x_2=51$	$x_1-x_3=26$	$x_1+x_3=44$
5) $z_1=37$	6) $z_1=37$	7) $z_2=20$	8) $z_2=20$
$z_4=13$	$z_4=13$	$z_3=15$	$z_3=15$
$x_1-x_4=30$	$x_1+x_4=40$	$x_2-x_3=7$	$x_2+x_3=25$
9) $z_2=20$	10) $z_2=20$	11) $z_3=15$	12) $z_3=15$
$z_4=13$	$z_4=13$	$z_4=13$	$z_4=13$
$x_2-x_4=11$	$x_2+x_4=21$	$x_3-x_4=4$	$x_3+x_4=14.$

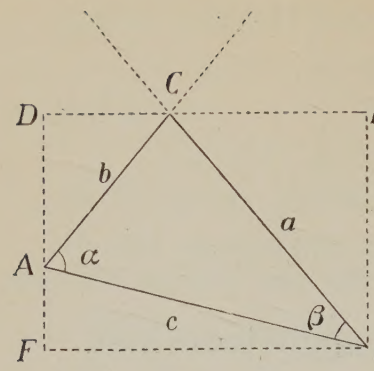
I allmänhet: om det finnes m rätvinkliga heltalstrianglar med en given katet, så kunna av dem bildas $m(m-1)$ rationella trianglar.

Det behöver till slut knappast påpekas, att vad som avhandlats i denna uppsats kan vara till gagn vid uppställandet av planimetriska och trigonometriska uppgifter.

Härledning av tangent-teoremet.

Refererad av ARVID LINDHAGEN.

Tangent-teoremet i den plana trigonometrien kan som bekant bevisas på åtskilliga sätt. Å ena sidan har man den rent analytiska härledningen ur sinus-teoremet, vilken emellertid förutsätter kännedom om additions-teoremen; å andra sidan finnas flera geometriska bevis, som kräva mindre förkunskaper och därigenom möjliggöra satsens upptagande på ett tidigare stadium. Bland dessa senare är det ett, som enligt min mening är alla sina medtävlare överlägset, men som hittills icke tyckes hava vunnit nämnvärt beaktande, i varje fall icke i förhållande till sitt värde. Det är offentliggjort i årg. 1907 av Pedagogisk Tidskrift, och dess upphovsman är numera avlidne fil. kandidaten FRANS LUNDGREN, som under en följd av år verkade som privatlärare i Stockholm. Att hans uppsats icke blivit känd och uppskattad såsom den förtjänar, beror dels säkerligen därav, att den tidskrift, där den publicerats, icke är ett matematiskt fackorgan, dels också möjligen av den originelle och anspråkslöse författarens knapphändiga framställningssätt, som gör att metodens företräden icke genast falla läsaren i ögonen. Jag har därför trott, att det kunde vara till gagn att i denna tidskrift lämna en redogörelse för det vackra beviset, anbefallande detsamma särskilt i herrar läroboksförfattares åtanke.



ABC är den givna triangeln. Följande konstruktioner utföras. Yttervinklarna vid *C*, vardera $= \alpha+\beta$, halveras genom linjen *DE*, mot vilken dragas normalerna *AD* och *BE*; slutligen är *BF* normal mot *AD*. Härigenom uppkomma utanför den givna triangeln tre rätvinkliga trianglar, vilkas vinklar och sidor lätt uttryckas i den givna triangelns element.

Först vinklarna:

$$\angle DCA = ECB = CBF = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

$$\angle ABF = CBF - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Därnäst sidorna:

$$EB = a\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$EC = a\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$DA = b\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$CD = b\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$AF = c\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$FB = c\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Nu följer omedelbart av figuren

$$AF = EB - DA$$
$$FB = EC + CD$$

eller

$$c\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = a\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - b\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$c\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = a\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + b\,Cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

varav genom division

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\,tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Att den nu refererade härledningen utmärker sig genom klarhet och enkelhet, lär icke kunna förnekas; omdömet om dess större eller mindre värde i jämförelse med andra metoder kan den enskilde icke fälla med anspråk på allmängiltighet, det blir givetvis alltid beroende av en del subjektiva moment; min egen tanke därom är emellertid redan angiven. Men i ett viktigt avseende vittnar erfarenheten bestämt om dess överlägsenhet: den är lättare att behålla i minnet än någon annan, såvitt de äro mig bekanta. Ligger icke månne häri det bästa kriteriet på dess pedagogiska värde?

*

I anslutning till ovanstående må även följande minnesord med anledning av Frans Lundgrens död räddas från glömskan. De äro skrivna av fil. doktorn Bror Fridolf Åkerberg och voro införda i Svenska Dagbladet för den 2 september 1917.

Frans Lundgren in memoriam. Den 28 augusti avled härstädes, som förut i korthet nämnts, privatläraren filosofie kand. *Frans Lundgren* i en ålder av 64 år.

Bördig från Västergötland, väckte han som gosse i Mariestads skola inspektors uppmärksamhet för sin stora matematiska begåvning. Läroverkets inspektor var ingen mindre än den frejdade matematikern C. J. Malmsten, förut professor i Uppsala, då landshövding över Skaraborgs län. Långa tider var Lundgren landshövdingens gäst på Marieholm, och då använde värden varje ledig stund att medelst sina enkla och klara metoder införa den begåvade gossen i den högre analysens värld. I Uppsala, dit han kom med rekommendation på fickan från Malmsten till dennes efterträdare professor Daug, funno hans studiekamrater snart, att det ej var någon dussinmatematiker som kommit i deras krets; och man var alltid angelägen att inhämta Frans Lundgrens säkra omdöme, så snart diskussion över något svårare problem fördes.

De senare decennierna har han verkat i huvudstaden

såsom lärare i sitt ämne, dels i privatskolor samt dels och isynnerhet såsom lektionsgivare; och legio torde deras antal vara, som hava »doktor Frans» rediga framställning att tacka för att de kunnat lotsa sig genom studentexamens bränningar. Elementarmatematiken har han riktat med flera nya bevis; och det »Lundgrenska beviset» för det s. k. tangentteoremet i trigonometrien är odisputabelt det elegantaste, som någonsin givits för denna viktiga sats.

Bland sina många vänner skall Frans Lundgren alltid ihågkommas såsom typen för en logisk tänkare, för en trofast vän och för en man av omutlig heder.

B. F. Å.

Elementär metod för bestämning av en algebraisk funktions maxima och minima.

Av KARL BLIX.

Vi utgå från definitionen: En given funktion $y=f(x)$ säges bli ett maximum för ett visst värde x_0 av den däri ingående oberoende variabeln x, om den för detta värde är större än för närliggande värden *å ömse sidor.* Blir funktionen under samma förhållanden mindre, säges den vara ett minimum.

Härav följer, att det måste finnas ett x-värde $x_1 > x_0$, för vilket funktionen antar samma värde som för ett annat x-värde $x_2 < x_0$, under förutsättning att x_2 befinner sig tillräckligt nära x_0. Betecknar x_ε medelvärdet mellan x_1 och x_2 och 2ε deras skillnad, blir

$$x_1 = x_\varepsilon + \varepsilon \text{ och } x_2 = x_\varepsilon - \varepsilon,$$

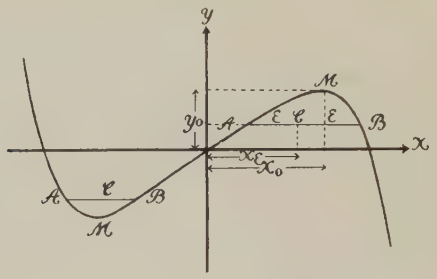
och vi få alltså

$$f(x_\varepsilon + \varepsilon) = f(x_\varepsilon - \varepsilon), \text{ där } x_\varepsilon + \varepsilon > x_0 > x_\varepsilon - \varepsilon.$$

Emedan x_0 och x_ε således ligga mellan samma gränser, som obegränsat närma sig varandra, då ε går mot noll, så måste x_ε bli $= x_0$, när ε blir $= 0$. *Man finner alltså det sökta värdet* x_0 *genom att i ekvationen* $f(x_\varepsilon + \varepsilon) = f(x_\varepsilon - \varepsilon)$ *sätta* $\varepsilon = 0$, sedan den efter nödiga reduktioner divideras med 2ε. Maximum- eller minimumvärdet av funktionen blir då $y_0 = f(x_0)$.[1]

[1] Är y en implicit funktion av x, $f(x, y) = 0$, erhålles, när man i ekv. $f(x_\varepsilon + \varepsilon, y) = f(x_\varepsilon - \varepsilon, y)$ sätter $\varepsilon = 0$, en ekv. $\varphi(x_0, y_0) = 0$, som tillsammans med $f(x_0, y_0) = 0$ ger värdena för x_0 och y_0.

Geometriskt betyder förfarandet, att vi parallellt med abskissaxeln draga en korda AB, vars längd är 2ε och mittpunkts C abskissa är x_ε. Ändpunkternas abskissor, $x_\varepsilon+\varepsilon$ och $x_\varepsilon-\varepsilon$, svara alltså mot ett och samma y-värde $[f(x_\varepsilon+\varepsilon)=f(x_\varepsilon-\varepsilon)]$. Denna korda tänka vi oss förskjutas parallellt med sig själv så, att dess längd minskas (ε går mot 0). Härvid närmar sig C obegränsat till max.- eller min.-punkten M för att sammanfalla med denna, när kordans längd blir noll ($x_\varepsilon=x_0$, när $\varepsilon=0$).



Vårt betraktelsesätt, som är en modifikation av Fermats bekanta metod, leder till en i de flesta fall användbar metod att bestämma, huruvida y_0 är ett max. eller min.

Ligger den y_0 innehållande delen av kurvan, som kordan avskär, över |under| denna, är tydligen y_0 ett max. |min.. För att utröna detta kan man beräkna funktionsvärdet för ett godtyckligt x mellan $x_\varepsilon+\varepsilon$ och $x_\varepsilon-\varepsilon$ och undersöka, om det är större eller mindre än $y=f(x_\varepsilon+\varepsilon)=$ $=f(x_\varepsilon-\varepsilon)=\dfrac{f(x_\varepsilon+\varepsilon)+f(x_\varepsilon-\varepsilon)}{2}$ för hur små värden på ε som helst. Vi välja $y_\varepsilon=f(x_\varepsilon)$ och beräkna

$$y-y_\varepsilon=\frac{f(x_\varepsilon+\varepsilon)+f(x_\varepsilon-\varepsilon)}{2}-f(x_\varepsilon).$$

Är $y-y_\varepsilon=k\varepsilon^2$ (där k är en konstant), blir alltså y_0 *ett max.* |*min.*|, *om* $k<0$ $|>0|$.

Är $y - y_\varepsilon$ ett uttryck, som jämte ε innehåller x_ε, beteckna vi det för korthetens skull med $\varphi(x_\varepsilon)$. Sättes $x_\varepsilon = x_0 + \delta$, blir $|\delta| < \varepsilon$ (ty $x_\varepsilon + \varepsilon > x_0 > x_\varepsilon - \varepsilon$), och genom att låta ε avtaga kan $|\delta|$ göras hur litet som helst, varav följer att om $\varphi(x_0) \gtrless 0$ även $\varphi(x_0 + \delta) = \varphi(x_\varepsilon) = y - y_\varepsilon \gtrless 0$ för tillräckligt små ε-värden. *Alltså är* y_0 *ett max.* $|min.$, *om* $\varphi(x_0) < 0$ $|> 0|$.[1]

Är y en implicit funktion av x, $f(x, y) = 0$, erhåller man $y - y_\varepsilon$ ur ekv.

$$\frac{f(x_\varepsilon + \varepsilon, y) + f(x_\varepsilon - \varepsilon, y)}{2} - f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = 0.$$

Vanligen innehåller $y - y_\varepsilon$ jämte x_ε och ε även y och y_ε, och vi beteckna för korthetens skull det erhållna uttrycket med $\psi(x_\varepsilon, y)$. Som x_ε obegränsat närmar sig x_0 samt likaledes y och y_ε obegränsat närma sig y_0, när ε avtager, så blir för tillräckligt små ε-värden $\psi(x_\varepsilon, y) = y - y_\varepsilon \gtrless 0$, om $\psi(x_0, y_0) \gtrless 0$. *Alltså är* y_0 *ett max.* $|min.|$, *om* $\psi(x_0, y_0) < 0$ $|> 0|$.[2]

Till metodens belysning behandla vi fyra uppgifter.

Ex. 1. Dela ett givet tal $2a$ så, att summan av de kvoter, som erhållas, då vardera delen divideras med den andra, blir ett minimum. (L. Vt. 06.)

Om ena delen är x, fås $y = \frac{x}{2a - x} + \frac{2a - x}{x}$ eller efter omformning:

$$y + 2 = \frac{4a^2}{2ax - x^2}.$$

[1] Är $\varphi(x_0) = \frac{f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0 - \varepsilon)}{2} - f(x_0) = 0$, blir $f(x_0)$ aritmetiska mediet mellan $f(x_0 + \varepsilon)$ och $f(x_0 - \varepsilon)$ och alltså funktionen i punkten (x_0, y_0) ständigt växande eller ständigt avtagande, d. v. s. den har där varken max. eller min. Men som x_0 erhållits ur ekv. $f(x_\varepsilon + \varepsilon) = f(x_\varepsilon - \varepsilon)$ för $\varepsilon = 0$, så blir tangenten i nämnda punkt parallell med abskissaxeln men genomskäres där av kurvan (inflexionspunkt).

[2] Är $\psi(x_0, y_0) = 0$ eller obestämt $\left(= \frac{0}{0}\right)$, blir frågan oavgjord.

Eftersom y skall ha samma värde för $x_\varepsilon+\varepsilon$ som för $x_\varepsilon-\varepsilon$, fås likheterna

$$\frac{4a^2}{y+2}=2a(x_\varepsilon+\varepsilon)-(x_\varepsilon+\varepsilon)^2=2a(x_\varepsilon-\varepsilon)-(x_\varepsilon-\varepsilon)^2 \quad \ldots (1).$$

Ur den senare likheten (1) fås $x_\varepsilon-a=0$. Sättes $\varepsilon=0$, erhålles $x_0=a$ och $y_0=2$.

Ur (1) fås vidare $\dfrac{4a^2}{y+2}=2ax_\varepsilon-x_\varepsilon^2-\varepsilon^2$.

Men $$\frac{4a^2}{y_\varepsilon+2}=2ax_\varepsilon-x_\varepsilon^2$$

$$\because \frac{4a^2}{y+2}-\frac{4a^2}{y_\varepsilon+2}=-\varepsilon^2<0$$

$$\because y-y_\varepsilon>0.$$

Alltså är $y_0=2$ ett min. för $x_0=a$.

Ex. 2. Två inbördes vinkelräta kordor i en cirkel med radien r skära varandra i en punkt, vars avstånd från cirkelns medelpunkt är $\dfrac{r}{2}$. Sök den största och den minsta rektangel, som kan bildas av dessa kordor. (L. Ht. 17.)

Sättas kordornas avstånd från medelpunkten $=x$ och z och rektangelns yta $=y$, erhålles efter elimination av z:

$$y=4\sqrt{(r^2-x^2)\left(\frac{3r^2}{4}+x^2\right)},$$

varur fås $\dfrac{y^2}{4}-3r^4=r^2x^2-4x^4$, vilken funktion vi här för fullständighetens skull behandla.

$$\because \frac{y^2}{4}-3r^4=r^2(x_\varepsilon+\varepsilon)^2-4(x_\varepsilon+\varepsilon)^4=r^2(x_\varepsilon-\varepsilon)^2-4(x_\varepsilon-\varepsilon)^4 \quad (1).$$

Ur den senare likheten (1) får $8x_\varepsilon^3-r^2x_\varepsilon+8x_\varepsilon\cdot\varepsilon^2=0$. Sättes $\varepsilon=0$, blir $8x_0^3-r^2x_0=0$

$$\because \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=\pm 2r^2\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0=\dfrac{r\sqrt{2}}{4} \\ y_0=\pm\dfrac{7r^2}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0=-\dfrac{r\sqrt{2}}{4} \\ y_0=\pm\dfrac{7r^2}{2} \end{cases}.$$

Ur (1) fås $\frac{y^2}{4} - 3r^4 = r^2 x_\varepsilon^2 + r^2\varepsilon^2 - 4(x_\varepsilon^4 + 6x_\varepsilon^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)$

$$\because\ y^2 - y_\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2(r^2 - 24x_\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2)$$

$$y - y_\varepsilon = \frac{4\varepsilon^2(r^2 - 24x_\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2)}{y + y_\varepsilon} = \psi(x_\varepsilon, y).$$

För $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2r^2\sqrt{3} \end{cases}$ blir $\psi(x_0, y_0) = \frac{\varepsilon^2(r^2 - 4\varepsilon^2)}{r^2\sqrt{3}} > 0.$

$\because\ y - y_\varepsilon > 0$ för tillräckligt små ε-värden.

$\because\ y_0 = 2r^2\sqrt{3}$ ett min. för $x_0 = 0$.

På samma sätt fås $y_0 = -2r^2\sqrt{3}$ ett max. för $x_0 = 0$.

För $\begin{cases} x_0 = \frac{r\sqrt{2}}{4} \\ y_0 = \frac{7r^2}{2} \end{cases}$ blir $\psi(x_0, y_0) = -\frac{8\varepsilon^2(r^2 + 2\varepsilon^2)}{7r^2} < 0.$

$$\because\ y_0 = \frac{7r^2}{2} \text{ ett max. för } x_0 = \frac{r\sqrt{2}}{4}.$$

På samma sätt fås $y_0 = -\frac{7r^2}{2}$ ett min. för $x_0 = \frac{r\sqrt{2}}{4}$ och $y_0 = \frac{7r^2}{2}$ ett max. för $x_0 = -\frac{r\sqrt{2}}{4}$ samt $y_0 = -\frac{7r^2}{2}$ ett min. för $x_0 = -\frac{r\sqrt{2}}{4}$.

(Uppgiften innebär dock, att x och y ej äro negativa)

Ex. 3. Vilken form måste en cylindrisk konservburk, rymmande 1 liter, ha för att dess yta skall vara så liten som möjligt?

Antag, att basradien är x dm., höjden z dm. och ytan y dm^2. Då fås $\begin{cases} y = 2\pi xz + 2\pi x^2 \\ \pi x^2 z = 1 \end{cases}$

eller genom elimination av z

$$xy - 2\pi x^3 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Emedan y har samma värde för $x_\varepsilon+\varepsilon$ som för $x_\varepsilon-\varepsilon$, fås

$$y(x_\varepsilon+\varepsilon)-2\pi(x_\varepsilon+\varepsilon)^3=y(x_\varepsilon-\varepsilon)-2\pi(x_\varepsilon-\varepsilon)^3=2 \quad (2).$$

Ur den förra likheten (2) fås: $y-6\pi x_\varepsilon^2-2\pi\varepsilon^2=0$ och, då $\varepsilon=0$, $y_0=6\pi x_0^2$, som insatt i (1) ger $x_0=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

$$\therefore\ y_0=\sqrt[3]{54\pi},\ z_0=2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$$

Ur (2) fås $yx_\varepsilon-2\pi(x_\varepsilon^3+3x_\varepsilon\cdot\varepsilon^2)=2$ och då $y_\varepsilon x_\varepsilon-2\pi x_\varepsilon^3=2$ blir $y-y_\varepsilon=6\pi\varepsilon^2>0$. Alltså är $y_0=\sqrt[3]{54\pi}$ ett min. för $x_0=\frac{z_0}{2}=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Cylindern skall alltså vara liksidig.

Ex 4. Har funktionen $y=x^3-3x^2+3x$ max. eller min.?

$$y=(x_\varepsilon+\varepsilon)^3-3(x_\varepsilon+\varepsilon)^2+3(x_\varepsilon+\varepsilon)=$$
$$=(x_\varepsilon-\varepsilon)^3-3(x_\varepsilon-\varepsilon)^2+3(x_\varepsilon-\varepsilon) \quad . \ . \ . \quad (1).$$

Av den senare likheten fås $3x_\varepsilon^2-6x_\varepsilon+3+\varepsilon^2=0$. Sättes $\varepsilon=0$, fås $x_0=1$ och $y_0=1$.

Ur (1) fås $y=x_\varepsilon^3+3x_\varepsilon\cdot\varepsilon^2-3x_\varepsilon^2-3\varepsilon^2+3x_\varepsilon$

$\therefore\ y-y_\varepsilon=3\varepsilon^2(x_\varepsilon-1)=\varphi(x_\varepsilon)$. För $x_0=1$ blir $\varphi(x_0)=0$. Funktionen saknar alltså max. och min. ($x_0=y_0=1$ är en inflexionspunkt).

Ett delbarhetskriterium.

Av KJ. RUNQUIST.
Fil. stud. vid Lunds universitet.

Med tillhjälp av nedanstående två satser, som mig veterligen icke förut blivit framställda, kan man bilda delbarhetsregler för de flesta heltal.

Sats 1.

Om man utgår från talet $p(10n-1)$*, vars sista siffra vi låta vara s, så är även uttrycket $\frac{p(10n-1)-s}{10}+ns$ delbart med $10n-1$.

Bevis.

$$\frac{p(10n-1)-s}{10}+ns=\frac{(p+s)(10n-1)}{10}.$$

Högra ledet innehåller faktorn $10n-1$. Att det är ett helt tal, eller med andra ord att $p+s$ är en mångfald av 10, inses vid närmare reflexion över det sätt, på vilket det härledda talet uppkommit. Deduktionen har nämligen varit följande:

1) I talet $p(10n-1)$ har sista siffran utstrukits. Resultat:

$$\frac{p(10n-1)-s}{10}.$$

2) Till det härigenom erhållna uttrycket har tillagts $n \cdot s$. Man får:

$$\frac{p(10n-1)-s}{10}+ns,$$

vilket uttryck sålunda betecknar ett helt tal.

* De bokstavsbeteckningar, som nu och i det följande användas, avse hela, positiva tal.

Sats 2.

Om man utgår från talet $p(10n-1)+q$, där $q<10n-1$, således från ett tal, som *icke* är delbart med $10n-1$, och tillämpar samma förfaringssätt som i sats 1, så blir slutresultatet icke delbart med $10n-1$.

Bevis.

$$\frac{p(10n-1)+q-s}{10}+ns=\frac{(p+s)(10n-1)+q}{10}.$$

Med hänsyn tagen till det ovan angivna villkoret för q inses, att högra ledet icke innesluter faktorn $10n-1$.

Av det ovan anförda följer, att om det härledda talet innehåller faktorn $10n-1$, så måste även det ursprungliga talet vara en mångfald av samma faktor.

Det härledda talet $\frac{(p+s)(10n-1)}{10}$ är sålunda ett *prövningstal*, med vars tillhjälp man kan avgöra, om det ursprungliga talet är delbart med $10n-1$.

På prövningstalet bör man givetvis kunna uppställa den fordran, att det skall vara *mindre* än det ursprungliga talet, vars delbarhet med faktorn $10n-1$ det gällde att avgöra. Villkoret härför är, att:

$$\frac{(p+s)(10n-1)}{10}<p(10n-1)$$

eller

$$s<9p.$$

Emedan s är ett ensiffrigt tal, är detta villkor alltid uppfyllt utom då $s=9$ och samtidigt $p=1$. Detta undantagsfall har endast teoretiskt intresse och torde därför kunna förbigås.

Har däremot p ett från talet 1 avvikande värde, erhållas städse prövningstal, som äro mindre än de ursprungliga.

Låtom oss taga ett praktiskt exempel.

Undersök om talet 54549 är delbart med 19!

$19=2\cdot10-1$. Alltså är $n=2$.

Enligt regeln skall

1) sista siffran i talet 54549 utstrykas. Man erhåller:

5454

2) den utstrukna siffran, 9, multipliceras med 2 och den erhållna produkten $2 \cdot 9 = 18$ adderas till 5454, varigenom fås $5454 + 18 = 5472$.

I stället för det ursprungliga talet 54549 ha vi erhållit ett mindre prövningstal 5472. Är detta delbart med 19, så är detta även händelsen med talet 54549.

Av talet 5472 härleda vi ett nytt prövningstal o. s. v. Den fortsatta undersökningen framgår av följande schema:

$$\begin{aligned} &5472. \\ &547 + 2 \cdot 2 = 551. \\ &55 + 2 \cdot 1 = 57. \\ &5 + 2 \cdot 7 = 19. \end{aligned}$$

Vi kunna nu regressivt sluta, att, emedan 19 erhållits i slutresultatet, så innehåller 57 denna faktor, härav följer vidare att 551, 5472 och slutligen 54549 äro delbara med 19.

Om vi efter att ha erhållit talet 19 hade fortsatt med samma förfarande, så skulle vi erhållit

$$1 + 2 \cdot 9 \quad 19,$$

d. v. s. vi skulle åter erhållit 19, vilket exemplifierar det ovan berörda undantagsfallet då $s = 9$ och $p = 1$.

*

Den ovan anförda sats 1 kan suppleras med följande:

Om man utgår från talet $p(10n + 1)$, vars sista siffra vi låta vara s, så är även uttrycket $\frac{p(10n+1) - s}{10} + ns$ delbart med $10n + 1$.

Då de för detta fall gällande härledningarna äro fullt analoga med de förut behandlade, torde utrymme för dessa icke behöva tagas i anspråk. Det bör dock ej lämnas

oanmärkt, att villkoret för att prövningstalet är mindre än det ursprungliga talet blir följande:

$$-s < 9p,$$

en förutsättning, som ju alltid förefinnes.

En avsevärd utvidgning av de nämnda reglernas tillämpningsområde erhålles på grund av den omständigheten, att den regel, som gäller för $10n \pm 1$, också är giltig för varje faktor, som ingår i nämnda tal. Så gäller t. ex. för 3 och för 7 samma regler som för 21, för 3 och 13 samma som för 39 o. s. v. Klart är, att man på detta sätt kan erhålla en mångfald regler för varje tal, av vilka man för praktiska behov naturligtvis bör välja den enklaste. Riktigheten av påståendet framgår med önskvärd tydlighet av föregående bevisföring.

Antag, att vi vilja undersöka, om talet 2961 är delbart med 7. Vi uppsöka den minsta 7-multipel, som med en enhet skiljer sig från en mångfald av 10. Man finner därvid, att $21 = 2 \cdot 10 + 1$ uppfyller detta villkor. Vi erhålla efter hand följande prövningstal:

$$296 - 2 \cdot 1 = 294.$$
$$29 - 2 \cdot 4 = 21.$$

Emedan 21 är jämnt delbart med 7, följer att 294 och 2961 även innehålla denna faktor.

För tals delbarhet med 13 välja vi samma regel, som gäller för $3 \cdot 13 = 39 = 4 \cdot 10 - 1$; för tals delbarhet med 17 samma som för $3 \cdot 17 = 51 = 5 \cdot 10 + 1$ o. s. v.

Slutligen vill jag påpeka, att dylika regler kunna uppställas för alla tal med slutsiffrorna 1, 3, 7 och 9. I de fall, då de icke direkt kunna skrivas under någon av formerna $10n \pm 1$, kan man nämligen alltid genom multiplicering med något lämpligt tal få fram de härför erforderliga slutsiffrorna 1 eller 9. Då detta emellertid icke är förhållandet med jämna tal eller tal med slutsiffran 5, kan man generellt fastslå reglernas användbarhet till tal, icke jämnt delbara med 2 eller 5.

Lund, den 22 januari 1919.

Om behandlingen av de elektromagnetiska lagarna inom elementarfysiken.

Av C. E. BLOM.

Vad är elektromagnetismen? Jo, det är läran om tumregeln, lillfingerregeln, trefingerregeln, skruvregeln, Maxwells regel m. fl. mer eller mindre officiella regler, för att nu ej nämna ett otal privata patentregler, som åtskilliga författare begåvat oss med.

Elektromagnetismen har blivit ett de många reglernas kapitel inom elementarfysiken. Se, de elektromagnetiska fenomenen äro så mångahanda och delvis så obegripligt svåra, tyckes det, att man måste ha ett lager av riktigt finfina regler att tillgå för att kunna klara upp det hela med.

Och effekten av de många reglerna? Jo, som oftast en mer eller mindre oredig bild, långt ifrån ägnad att ge en klar översikt av det hela.

Det är närmast en samling isolerade fakta, ofta återgivna i sin historiskt givna form och delvis därför ej motsvarande nutida behov, som läroböckerna bjuda på. Det synes ännu vara mången främmande, att vi kunna giva en enhetlig framställning av detta kapitel efter enkla linjer, en framställning, som har betydligt större kunskapsvärde och där åskådningen och allmänna fysikaliska lagar träda i stället för de många minnesreglerna.

Det är huvudsakligen Faradays uppfattning av de elektromagnetiska företeelserna, som möjliggör en sådan framställning.

Faradays idéer ha alltför litet kommit till sin rätt inom den elementära fysiken. Orsaken kan nog i många fall vara att söka dels i bristande kunskap, dels i ett konservativt fasthållande vid det gamla. Men ofta torde den ligga djupare.

Vill man framställa dessa idéer på ett korrekt sätt och så att de verkligen giva någon valuta, bör man — så resonerar mången — framställa dem i den form, som Maxwell givit. I hans fundamentala elevationer har man att söka — och där ligger ju också — kvintessensen i det hela. Till dem bör man hålla sig. Nu möter det ju emellertid svårigheter att föra framställningen så långt på det grundläggande stadiet, och så har man avstått från alltsammans.

Ty man har ej velat nöja sig med kvalitativa resonemang om materialiserade kraftrör och eterspänningar; det är ju metafysiska oting, säga för övrigt förfäktarna av ett renodlat fenomenologiskt framställningssätt. Och ej heller ha de, som anlagt en strängare syn på saken, velat laborera med de visserligen åskådliga och talande men — menar man, ofta med rätta — nog så haltande analogier, som man finner i Faradays egen framställning — t. ex. analogien mellan det magnetiska flödet och strömmande elektricitet — och som upptagits och utvecklats vidare i engelsk-amerikansk populär och teknisk litteratur.[1]

Å andra sidan har ju det molekylära betraktelsesättet i och med elektronläran gjort sitt återinträde inom elektricitetsläran. De begrepp och matematiska hjälpmedel, som utvecklats på basis av de äldre teorierna, äga därför fortfarande i viss mån aktualitet, och detta synes vara en kärkommen anledning för mången att låta det helt bero vid det gamla. Även pedagogiska skäl därför andragas.

Så uppfattar jag ställningen för närvarande och ser i det sagda närmaste orsaken till att det Faradayska tänke-

[1] En typisk framställning i denna stil med alla dess fel och förtjänster är den av The Wireless Press utgivna »Magnetism and Electricity for Home Study» av Penrose, London 1918.

sättet på några få undantag när ej lyckats genomsyra de elementära läroböckerna.

Men trots de ovan refererade invändningarna vill jag göra gällande, att så bör ske med det snaraste. Den *grundläggande* undervisningen inom elektromagnetismen bör gå i Faradays anda.[1] Man får därvid söka gå en medelväg, så att man å ena sidan ej ställer alltför stora fordringar på framställningen, men å andra sidan ej heller utan vidare ger sig ut på analogiernas och de svävande analogislutens gungfly, utan ser till, att man har fast mark under fötterna. Man bör även så till vida göra en kompromiss, att man där så är lämpligt använder sig av de äldre teoriernas uttrycksmedel.

Glädjande nog har det såväl i vårt land som annorstädes på senare tid höjts röster för ett tillämpande av Faradays idéer inom skolfysiken. Det är närmast från tekniskt håll som impulserna kommit; i Tyskland t. ex. från Emde,[2] som emellertid skjuter över målet i sina fordringar, i det att han vill placera framställningen på ett plan, som ligger alldeles för högt för skolfysiken.

I vårt land har särskilt lektor Gallander i artiklar i denna tidskrift och i sin lärobok i elementär elektricitetslära framlagt ett beaktansvärt program till modernisering i denna riktning, därvid huvudsakligen anslutande sig till den engelsk-amerikanska tekniska litteraturen.

Liksom denna lider lektor Gallanders framställning av åtskilliga formella brister, som störa mången. Grundtonen i densamma är dock den rätta. Och för att ej onödigt inkräkta på tidskriftens utrymme vill jag referera till lektor G:s lärobok, så ofta ske kan. Jag hoppas därvid bli i tillfälle, dels att klargöra en del dunkla punkter i lektor G:s framställning, dels att påvisa, hur man relativt enkelt kan avhjälpa en del av nämnda brister, och

[1] Det vore tillfredsställande att även beröra frågan om behandlingen av elektrostatiken ur Faradays synpunkt, men förf. måste här avstå därifrån.

[2] Zeitschr. für Math. und Naturwiss. Unterricht. 1917, S. 358, 410, 442.

hoppas så i någon mån kunna bidraga till att föra saken framåt.

Vid den grundläggande behandlingen av

Magnetismen

kan man i stort sett följa Gallanders framställning. Jag ställde mig först mycket tveksam gentemot dennes förslag att först i samband med kapitlet om induktionsströmmar införa ett mått på flödet, detta huvudsakligen av den grund, att det av G. föreslagna tillvägagångssättet syntes mig både pedagogiskt och principiellt otillfredsställande.[1] Sedan jag funnit, att det är möjligt att genom en omläggning av framställningssättet avhjälpa dessa brister, har min tvekan försvunnit, och jag anser den föreslagna vägen fullt framkomlig. Den äger t. o. m. avgjorda företräden; den förutsätter i mindre grad teoretiska resonemang, möjliggör en fullt empirisk lärogång och fordrar därvid endast enkla experimentella hjälpmedel samt för snabbt fram till induktionslagen (ekv. 2), som bör betraktas som en central punkt i framställningen.

I stället för att utgå från Coulombs lag som fundamentallag och på vanligt sätt definiera polstyrka, fältintensitet o. s. v. kan man således taga den inducerade elektromotoriska kraften som mått på flödet. Den tid, som användes för en experimentell verifiering av nämnda lag, kan då anslås till de kvantitativa induktionsförsök, som jag i det följande vill föreslå och vilka äro av betydligt större värde.

Men hur går det med det kvantitativa polbegreppet, när man lämnar Coulombs lag? Lektor G menar[2] — liksom Karapetoff,[3] hans närmaste förebild — att man inom fysiken över huvud ej alls har bruk för detsamma. Att man efter den nu nämnda omläggningen kan komma ett

[1] Pedagogisk tidskrift 1918, sid. 152.
[2] Denna tidskrift 1917—1918, sid. 153.
[3] Magnetic Circuit, New-York 1911.

gott stycke på väg utan detsamma, att man kanske t. o. m. kan undvara det på skolstadiet, medger jag, men däremot ej utan olägenhet, när det sedermera gäller en matematisk behandling av det magnetiska fältet.[1] När man anser sig behöva det, kan man införa en definition på polstyrka, även om man följer den här föreslagna vägen, och således utan användning av Coulombs lag, blott och bart genom att vända på den vanliga definitionen på fältstyrka.

Omläggningen i fråga innebär naturligtvis ej med nödvändighet att Coulombs lag helt strykes, utan närmast att den frånträder sin plats som fundamentallag. Lagens stora historiska betydelse kan motivera ett omnämnande t. ex. i samband med en kort redogörelse för absoluta måttsystemet, vars ledande principer nog förtjäna att refereras även vid skolundervisningen — om nämligen tillräcklig tid disponeras — ehuru det måste anses olämpligt att detaljerat genomgå detsamma och de på systemet baserade mätmetoderna med ty åtföljande inlärande av de absoluta elektriska och magnetiska enheterna.

Den bildlika benämningen magnetiskt flöde — magnetisk induktion är flödet genom ytenheten — uppfattat som ett vektorflöde användes med fördel. Till det ej fullt berättigade att anse det omgivande mediet endast som en passiv, sämre eller bättre ledare för flödet, återkommer jag vid ett annat tillfälle. Det är emellertid ett gott hjälpmedel i början.

Vid behandlingen av den

Elektriska strömmens magnetiska verkningar

bör *skruvregeln* användas för riktningsbestämningar; den är lätt att minnas och användbar i alla möjliga förekommande fall. Tumregeln kan man undvara.

Vid undersökningen av en strömförande ledares rörelse

[1] Måhända det går, men de framställningar i den moderna tekniska litteraturen jag funnit, i vilka detta begrepp eliminerats och ett rent elektriskt måttsystem använts, synas mig visserligen beaktansvärda, men verka icke övertygande.

i ett magnetfält bör man överge försöket med flytelementet (se t. ex. Molls lärobok) med åtföljande regler.[1]

I stället bör man först undersöka fältets utseende kring en fast linjär ledare, placerad vinkelrätt mot flödet i ett homogent magnetfält (se fig. 1 eller Gallander, fig. 37 och 38), varvid man finner, att fältet förstärkes på den sida, där fälten samverka (skruvregeln!) och försvagas på motsatt sida. På den förra sidan ha vi således en ökad eterspänning, på den senare en minskad.

Den fasta ledaren utbytes därefter mot en lättrörlig (t. ex. julgransglitter), och man finner, att ledaren pressas vinkelrätt mot fältet (fig. 1) från den förstärkta sidan mot den försvagade, från det högre mot det lägre »etertrycket». Understundom användes den s. k. lillfingerregeln (Gallander, sid. 27) för att bestämma rörelseriktningen, och jag har ibland använt mig av densamma, men den kan undvaras. Man behöver endast med skruvregeln undersöka på vilken sida en förstärkning äger rum. Rörelseriktningen hos en motor bestämmes utan minsta huvudbry på detta sätt, varvid man observerar, att när det gäller en Grammes ring, endast strömmarna på yttersidan spela någon roll; fältet på innersidan är nämligen för svagt.

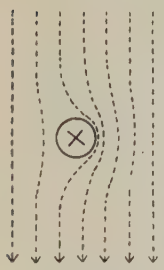


Fig. 1.

Med försök visas, att den ömsesidiga inverkan av strömmen och magnetfältet till sin storlek är beroende av såväl strömmens som magnetfältets styrka. Kvantitativa försök behövas ej.

Parallella strömmars verkningar på varandra demonstreras lätt med hjälp av »glittertrådar». Medelst skruvregeln undersökes, om fältet mellan trådarna förstärkes

[1] Man brukar därvid fästa uppmärksamheten vid flödet i magneten, under det att man i och för undvikande av några fjärrverkningsföreställningar bör betrakta flödet i ledarens omedelbara omgivning. Vill man som en tillämpning göra det roande försöket med flytelementet, så är det instruktivt att bestämma rörelseriktningen enligt det här föreslagna tillvägagångssättet.

eller försvagas. I förra fallet pressas ledarna isär (repulsion), i senare fallet ihop (attraktion). Se för övrigt Gallander, §§ 12 och 13.

Induktionsströmmar.

Här följer jag väsentligt andra linjer än lektor G., varför jag rätt utförligt måste uppehålla mig vid detta kapitel.

Man gör klokt i att här — såsom ofta sker i tekniska läroböcker — göra en uppdelning och först behandla *generatorverkan*, varmed förstås induktionsströmmars uppkomst vid en ledares eller magnets rörelse, därefter *transformatorverkan*, uppkomsten av en ström i ett variabelt fält.

Kap. inledes på vanligt sätt med försök med en spole och en magnet, varvid Lenz' lag genomgås.

För att få sambandet med det föregående fullt klart brukar jag därefter övergå till en linjär ledare i ett homogent magnetfält[1] och visa, att en ström uppkommer, då denna skär flödet, däremot ingen, då den förflyttas parallellt med detsamma. Man undersöker strömriktningen och finner, att om t. ex. ledaren, L (fig. 2), förskjutes i riktningen AB, är strömmen riktad in mot papperets plan. Den uppkomna induktionsströmmen förstärker således fältet framför ledaren, vilket resulterar i ett motstånd mot rörelsen (fig. 1).

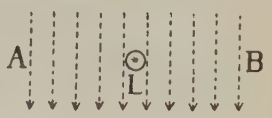


Fig. 2.

Vid avgörandet av induktionsströmmens riktning, behöver man således endast med *skruvregeln* bestämma den *strömriktning, som ger en förstärkning av fältet omedelbart framför ledaren.* Skär denna flödet under sned vinkel, är det rörelsekomposanten vinkelrätt mot flödet, som kommer

[1] Har man ej en känslig galvanometer, kan man använda fältet mellan polskorna på en stark elektromagnet, t. ex. den av firman Rylander och Svanström saluförda, då t. o. m. en vanlig vertikalgalvanometer är användbar.

i fråga. Man observerar således endast, från vilken sida kraftlinjerna skäras.

Strömriktningen vid en generator erhålles utan svårighet på detta sätt. Fig. 3 visar schematiskt fältets utseende vid en jordinduktor, som anföres som generell typ. När ledaren befinner sig i den vänstra hälften av fältet, är den utsatt för ett mottryck uppifrån, och induktionsströmmen går in mot papperets plan. I den högra delen av fältet verkar ett mottryck underifrån, och induktionsströmmen går mot åskådaren.

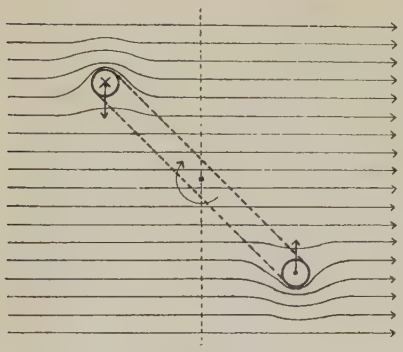


Fig. 3.

Det erbjuder ofta avsevärda fördelar att i överensstämmelse med detta tillvägagångssätt kunna betrakta ett linjeelement eller en del av en sluten ledare. Så t. ex. vid Grammes ring, där man sålunda finner endast den på yttersidan belägna delen av varje varv effektiv och man lätt inser dess oekonomiska lindning och förstår fördelen av trumlindningen.

Transformatorverkan demonstreras på vanligt sätt med hjälp av två bredvid varandra placerade spolar. Man finner, att induktionsströmmen är så riktad, att den *söker motverka förändringen i magnetfältet.* Slutes t. ex. en ström i pilens riktning i spolen I (fig. 4), strömmar ett magnetiskt flöde in från vänster i spolen II; fältet i II förändras, och en induktionsström uppkommer, som sänder ut ett magnetiskt motflöde i riktning mot I, d. v. s. strömmen går uppåt på II:s framsida.

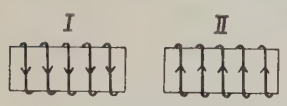


Fig. 4.

För såväl generator- som transformatorverkningarna gäller således den allmänna lagen, att *induktionsströmmen*

är så riktad, att förändringen i läget eller fältet motverkas. Denna lag, som jag brukar benämna »status-quo»-principen, kan betraktas som ett specialfall av en allmän trögheтslag, en generaliserad Chatelier-Brauns princip, en princip, alltför litet beaktad inom elementarfysiken, där den förståndigt använd kan göra avsevärda tjänster på flera olika områden.[1]

Genom att konsekvent anlägga denna syn på tingen inordnar man induktionsfenomenen under en allmän fysikalisk lag; man ser en mening i det hela och slipper att belasta minnet med mer eller mindre artificiella minnesregler, t. ex. Maxwells regler, vilka åstadkommit oreda i mer än en pojkhjärna.

Genom uppdelningen i generator- och transformatorverkan låter man såväl Faradays betraktelsesätt — skärning av flödet — som Maxwells — förändring av det omslutna flödet — komma till sin rätt. Det är visserligen sant, att Maxwells formulering är den generellare och att den rätt applicerad i sig innesluter Faradays.[2] Men det förekommer dels fall, där detta är svårt att inse, dels även sådana, där man lätt kan ledas vilse, när man vill använda sig av Maxwells formulering.[3] I sin vanliga integrala form — den enda möjliga vid elementarundervisningen — förutsätter den dessutom en sluten ledare, och det är såsom ovan påpekats ofta fördelaktigt att kunna betrakta ett linjeelement, och detta går ju mycket lätt, även kvantitativt — se ekv. 2 — när man betjänar sig av Faradays betraktelsesätt.

Därmed är den kvalitativa sidan av induktionsfenomenen klar, och här brukar man vanligen sätta punkt i skolfysiken.

För ett nöjaktigt begripande av induktionsföreteelserna

[1] Chwolsons Physik, Bd III, S. 474.

[2] Se Emdes ingående behandling i Elektrotechnik und Maschinenbau, 1908, s. 997, 1023, 1074, 1119.

[3] Ett sådant fall möter man nedan vid användningen av apparaten fig. 5. När veven passerar avbrottet vid A, ändras det omslutna flödet (se försök 5 b) plötsligt; därvid uppstår emellertid ej någon motsvarande induktionsstöt. Skärningsprincipen leder en här omedelbart rätt.

och deras praktiska tillämpningar kräves emellertid ovillkorligen även beaktande av det kvantitativa förloppet. Man måste komma fram till Faradays induktionslag och få en enhet för mätning av flödet, och att detta kan ske med mycket enkla medel, vill jag söka visa.

Kvantitativa induktionsförsök.

För dessa försök har jag konstruerat en apparat, vars utseende framgår av fig. 5 och 6.

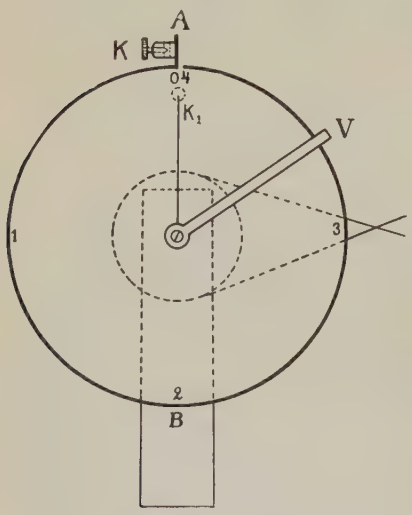


Fig. 5.

På ett stöd av mässing är fäst en cirkelformig platta av korslimmad björk, 8,5 cm. i diameter. Kring denna är fastskruvat ett band, AB, av 1 mm. mässingsplåt, uppskuret vid A, lämnande ett mellanrum på 1 mm. Bandet skjuter ut något utanför skivans plan och mot den utskjutande kanten löper en vev (V) av mässingsplåt, fäst vid axeln, likaledes av mässing, med en skruv, med vars hjälp man kan reglera vevens tryck mot skenan. Denna är överst uppvikt och försedd med en klämskruv, K. Rätt under denna på baksidan sitter en annan klämskruv, K_1, i ledande förbindelse med axeln. Den i veven vid rotationen uppkomna induktionsströmmen ledes genom dessa skruvar till en galvanometer.

Avbrottet vid A är nödvändigt för ett av de följande försöken (5 b) och medför även den fördelen, att induktionsströmmen hela tiden går åt endast ett håll i skenan AB, vilket förenklar det hela något.

På axeln är anbragt en trissa av trä, med vilken veven sättes i rotation. Trissan bör drivas med korslagda snören och med hjälp av ett rätt stort drivhjul; detta för att minska trycket mot axeln. Vid större tryck löper veven ojämnt.

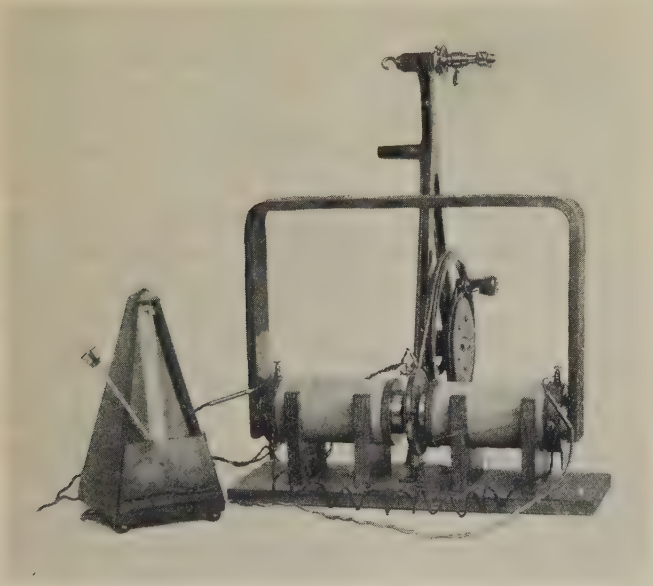


Fig. 6.

Som drivhjul har jag använt skolans centrifugalmaskin, som försetts med ett extrahjul för att få lämplig utväxling. Rotationen åstadkommes för hand. En metronom sättes i gång, och man vevar i takt med dennas slag. Med någon övning erhåller man på detta sätt en mycket jämn rotationshastighet. Försök med motor som drivmedel slogo mindre väl ut; det är svårt att få en mindre motor att gå med konstant hastighet.

Apparaten placeras i fältet mellan ett par seriekopplade spolar (fig. 6) och centreras så, att dess axel sammanfaller med spolarnas. Dessa vila på löstagbara stöd, mon-

terade på en träplatta. Apparaten har dimensionerats, med tanke på att spolarna skulle kunna närmas till varandra så mycket som möjligt; minsta avstånd 2 cm.

I vardera spolen kan inskjutas en cylinder av mjukt järn av 44 mm. diameter, som skjuter ut något utanför spolarna. I och för fältets ytterligare förstärkning kan man anordna en sluten magnetisk krets medelst en vid, U-formig järnram, som ligger an på järnkärnornas ändytor.

Som spolar användas de av Lemoine beskrivna rullarna — 10 lager, cirka 950 varv 1 mm. koppartråd — till den av firman Rylander och Svanström tillverkade elektromagneten.[1]

Fältet mellan spolarna är visserligen ej homogent, men det är fullt symmetriskt, så att om det hela är omsorgsfullt centrerat, kan man utan att äga någon kännedom om flödets styrka i olika punkter, på grund av symmetrien sluta till att lika stora sektorer omsluta lika stort flöde. Roterar veven med konstant hastighet, vet man således, att antalet per tidsenhet överskurna linjer är konstant.

Det är av vikt vid de kvantitativa försöken, att veven hela tiden ligger an mot skenan även vid större hastighet. Jag har kontrollerat detta genom att inkoppla kretsen mellan K och K_1 i en känslig brygganordning och mäta motståndet. Differensen vid vila och rotation befanns därvid vara mindre än 0,01 ohm, vilket utvisade tillfredsställande kontakt.

Vid försök med järnfria spolar fordras en känslig galvanometer. Jag har använt mig av en Nya elementarskolans projektionsgalvanometer (d'Arsonval) om 31 ohms motstånd, där ett skalutslag av 1 cm. på 6 m. avstånd betyder $1 \cdot 17 \cdot 10^{-8}$ amp. Vid försök med järnkärna erfordras ej någon större känslighet. Man kommer då vid starkare ström i spolarna — 5 amp. — upp till några millivolt.

Med apparaten kan man göra följande serie av försök.

[1] Se Meddelanden från firman, häftet 1, sid. 2.

1. *Induktionsströmmen är proportionell mot det per sekund överskurna flödet.*

Man finner omedelbart, att galvanometerns utslag är konstant vid konstant rotationshastighet och ökas med denna. För att visa, hur man lämpligen förfar vid bestämning av det kvantitativa sambandet, vill jag anföra ett av mina försök.

Genom spolarna, som försågos med järnkärnor men ej med ram, vilken stör symmetrien, sändes en konstant ström av 2 amp. Spolarna tåla denna belastning under lång tid.

Galvanometern förkopplades med c:a 800 ohm; detta emedan jag använde relativt starka induktionsströmmar för att slippa korrigera för de svaga termoströmmar, som uppstå genom friktion vid vevens rotation.[1]

Med lämplig utväxling bringas veven i rotation, och man avpassar hastigheten så, att ett önskat galvanometerutslag erhålles. Med någon övning kan man veva, så att utslaget förblir tillräckligt konstant, med variationer på ± 1 eller vid större utslag ± 2 skaldelar.

För varje gång veven passerar sitt översta läge höres en tydlig knäppning. Man räknar knäppningarna och observerar med stoppur tiden för 50 rotationer. Vid större hastighet räknar man i perioder om 10 i varje och noterar antalet perioder med fingrarna; eller man kan bestämma drivhjulets omloppshastighet, vilken är betydligt mindre. Detta tillvägagångssätt är i föreliggande fall bekvämare än användningen av en metronom.

Tabell 1.

α	t	n	$\alpha : n$
30	34,0	1,47	20,4
60	16,6	3,01	20,0
90	11,0	4,54	19,8
120	8,1	6,17	19,4

[1] Genom omsorgsfullare val av material torde dessa kunna nedbringas högst väsentligt.

Tabell 1 innehåller galvanometerutslaget (α), tiden i sekunder för 50 rotationer (t), antalet varv per sekund (n) och kvoten $\alpha : n$. Av tabellen framgår, att denna kvot är konstant, d. v. s. induktionsströmmen är proportionell mot den hastighet, varmed flödet överskäres.

2. *En konstant elektromotorisk kraft induceras.*

Av största vikt är att fastslå, att det är en bestämd elektromotorisk kraft, som induceras. Bäst sker detta genom att man visar, att Ohms lag gäller för den inducerade strömmen.

För att på lämpligt sätt kunna variera motståndet i galvanometerledningen borttog jag det stora förkopplingsmotståndet och måste därför ha svagare fält (järnkärnorna och 0,1 amp. spolström). Med hjälp av en metronom hölls en konstant hastighet (1,35 varv per sekund). Emedan jag ej befriat mig från termoströmmar, måste jag korrigera för dessa, vilket tillgick så, att jag som nolläge noterade galvanometerns utslag, då veven roterades med spolströmmen frånkopplad[1]; remanensen i järnkärnorna var så obetydlig, att den ej spelade någon roll.

Tabell 2.

m	α	$\alpha \cdot m \cdot 10^{-2}$
32	108	34,6
52	68	35,4
72	48	34,6
102	35	35,7
152	23	35,0

[1] Att det är termoströmmar, man har att göra med, kan man visa genom att kasta om rotationsriktningen, då galvanometern gör utslag åt samma håll som förut.

Tabell 2 innehåller galvanometerkretsens motstånd i ohm (m),[1] galvanometerns korrigerade utslag (α) och produkten $\alpha \cdot m \cdot 10^{-2}$. Denna är tydligen inom försöksfelens gränser konstant, varav framgår, att en konstant elektromotorisk kraft induceras.

Man påpekar, att samma elektromotoriska kraft erhålles, om veven väljes av annat material, och att således detta endast så till vida övar inflytande på fenomenet, att det inverkar på kretsens motstånd och därmed på strömstyrkan. Detta betonas ytterligare, då det sedermera (försök 5 b och c) gäller induktion i ett variabelt fält.

3. *Enhet för flödet.*

Av 1 och 2 framgår, att den inducerade elektromotoriska kraften (E) är proportionell mot den hastighet, varmed flödet överskäres. Överenskommer man om att representera detsamma genom linjer, blir E således proportionell mot antalet per sekund överskurna flödeslinjer. Är $d\Phi$ det på tiden dt överskurna flödet, har man

$$E = \text{konst.} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ökas strömstyrkan i spolarna och därmed fältets styrka, finner man vid lika hastighet ett större E. Finner man t. ex. i fältet II ett dubbelt så stort E, betyder det, att effekten är densamma, som om man roterade med dubbelt så stor hastighet i det förra fältet (I). Man skulle då på lika tid överskära dubbelt så många linjer. Skenan AB bör således i fältet II omfatta dubbelt så många linjer som i fältet I. Man definierar då och säger, att det av skenan omfattade flödet II är dubbelt så stort som I.

Den inducerade elektromotoriska kraften får således utgöra ett mått på flödet.[2] Enheten för detsamma kan

[1] Själva apparatens motstånd kan försummas.

[2] Denna kortare benämning är att föredraga framför den vanligare induktionsflöde; detta, emedan nybörjaren lätt förväxlar induktion och induktionsström.

man bestämma så: *induceras i en ledare en konstant elektromotorisk kraft av 1 volt, överskär ledaren per sekund 10^8 maxwell.* En maxwell representeras genom en »linje».

Roterar veven med en hastighet av ett varv per sek. och därvid induceras en volt, är det av skenan omfattade flödet 10^8 maxwell. Gör den n varv per sek. och det induceras E volt, är flödet, $\Phi = \frac{E}{n} \cdot 10^8$ maxwell, eller omvänt $E = 10^{-8} \cdot n\Phi$ volt. Emedan $n\Phi$ är det per sekund överskurna flödet, gäller

$$E = \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ volt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

4. *Flödet är proportionellt mot strömstyrkan i järnfria spolar.*[1]

Med metronom hölls en konstant hastighet (1,5 varv per sek.) och strömstyrkan i spolarna varierades.

Tabell 3.

i	α	α/i
1	36,0	36,0
2	72,5	36,3
3	107,0	35,7
4	150,0	37,5

Tabell 3 innehåller den använda strömstyrkan i amp. (i), det för termoströmmar korrigerade galvanometerutslaget (α) och kvoten ($\alpha : i$). Av tabellen synes, att denna kvot är konstant, vilket innebär, att det av skenan omfattade flödet är proportionellt mot strömstyrkan.

5. *Ballistisk mätning av flödet.*

a. Man skaffar sig ett tillräckligt starkt fält (järnkärnor nödvändiga), insätter vid A (fig. 5) en trästicka som

[1] Kan även visas efter försök 5 medelst ballistisk metod.

spärr och svänger hastigt veven runt från utgångsläget 0 till resp. lägena 1, 2, 3 och 4 (noggrann centrering!). Veven överskär därvid flöden, som — på grund av symmetrien — förhålla sig som 1 : 2 : 3 : 4. Man observerar de ballistiska utslagen och finner dem mycket nära proportionella mot flödena; i ett fall 21, 41, 63 och 83 skaldelar. Användes ett dubbelt så starkt fält, fördubblas alla utslag.

Det ballistiska utslaget är således proportionellt mot det överskurna flödet.

b. De föregående försöken ha omfattat endast generatorverkan. Det återstår att undersöka det kvantitativa förloppet vid föränderligt fält i en sluten ledare.

Detta kan ske på enkelt sätt med hjälp av samma apparat. Galvanometern och ledningen från K genom skenan, veven och den vertikala ledningstråden till K_1 bilda en sluten ledare. I läget 0 är flödet, som omfattas av ledaren, 0. I läget 4 omfattar den slutna ledaren hela det inom den cirkulära skenan befintliga flödet, i lägena 1, 2, 3 respektive en, två och tre fjärdedelar. Man sluter eller öppnar spolströmmen med veven i de olika lägena och finner ballistiska utslag, som förhålla sig som 1 : 2 : 3 : 4. Man kan också med strömvändare kasta om spolströmmens riktning, varvid alla utslagen fördubblas.

Det ballistiska utslaget är alltså proportionellt mot förändringen i det omslutna flödet, eller om man så vill, mot förändringen i antalet omslutna linjer.

Genom att ersätta rotationsapparaten med en liten rulle med några varv tråd, kan man naturligtvis visa, att utslaget är proportionellt mot antalet varv. Vill man dessutom slå fast, att det är förändringen det gäller — att ett förut befintligt fält ej inverkar — kan man taga en dylik rulle med tillräckligt många varv, avlägsna järnkärnorna ur spolarna och öka spolströmmen — med hjälp av skjutmotstånd — momentant från 0 till 1, 2, 3, 4 amp., varvid flödet ökas successivt med samma belopp och man ständigt finner samma utslag. Ökas strömstyrkan med jämn

hastighet — Gallanders fundamentalförsök (se sid. 20) — så erhålles ett konstant utslag.

c. Därefter placeras veven i godtyckligt läge, spolströmmen slutes, och det ballistiska utslaget noteras. Med bibehållet fält föres veven hastigt över sektorn ABV (fig. 5), varvid man finner samma utslag som nyss. En förändring av antalet omslutna linjer är således ekvivalent med en skärning av motsvarande antal. Om $d\Phi$ i ekv. 2 (sid. 16) betyder förändringen i det omslutna flödet, gäller formeln även för transformatorverkan, och man har härmed induktionslagen i Maxwells formulering.

d. Sedan man ytterligare visat, att det ballistiska utslaget är beroende på kretsens motstånd och på dämpningen och påpekat, att dessa faktorer böra vara oförändrade vid en serie försök, är grunden lagd för relativa ballistiska mätningar.

Men man kan även utföra kvantitativa sådana. Jag vill visa, huru man därvid vid givet motstånd och dämpning kan bestämma galvanometerns ballistiska konstant.

Med järnram, järnkärnor och 2 amp. spolström erhölls ett starkt fält. Veven roteras med en konstant hastighet av 50 varv på 11 sek., ett förkopplingsmotstånd på 2 000 ohm insköts i galvanometerkretsen (galvanometerns motstånd 31 ohm) och det konstanta utslaget — 95 cm. — observerades. Enligt formeln sid. 16 är det av skenan omfattade flödet $\Phi = 10^8 \cdot E/n$. Ett utslag av 1 cm. på skalan betydde en strömstyrka av $1{,}17 \cdot 10^{-8}$ amp., varav $E = 2\,031 \cdot 95 \cdot 1{,}17 \cdot 10^{-8}$ volt. Emedan $n = {}^{50}/_{11}$, erhålles således $\Phi = 49\,660$ maxwell. Detta är alltså det flöde skenan omfattar.

Veven ställdes därefter i läget 4, då den slutna ledaren (försök 5 b) omfattar hela detta flöde. Förkopplingsmotståndet borttogs, spolströmmen bröts och det ballistiska utslaget noterades (106 cm.). Enligt 5 b motsvarar således ett ballistiskt utslag på 1 cm. vid 31 ohms motstånd i kretsen en förändring av 469 maxwell.

Ytterligare två försök med resp. 1 och 1,5 amp. spolström gåvo värdena 465 och 473; medeltal av bestämningarna således 469.

Genom att i den slutna kretsen inskjuta ett reglerbart motstånd och repetera de nyssnämnda ballistiska försöken med olika motstånd kan man skaffa sig en serie observationer, som visa sambandet mellan kretsens motstånd och det ballistiska utslaget; man ritar en kurva och kan med dennas hjälp grafiskt finna den ballistiska konstanten vid givet motstånd.

Enklare är dock att direkt göra en bestämning för det motstånd, som förekommer i den krets man önskar använda. Vid ballistiska mätningar brukar man t. ex. ofta begagna sig av en provspole med känt varvantal. Man inkopplar då denna som motstånd i försöket och bestämmer det ballistiska utslaget. På vanligt sätt kan man sedan — t. ex. genom att hastigt rycka den ur fältet eller genom att rotera den ett halvt varv — bestämma flödet i olika delar av fältet.[1] Flödets riktning i en given punkt kan man bestämma genom att undersöka, i vilket läge man vid vridning erhåller maximalt utslag. Flödet är då vinkelrätt mot spolens plan. Man kan visa, att denna riktning sammanfaller med kraftlinjernas, som man erhåller med järnfilspån.

Man har nu full rörelsefrihet och kan göra de kvantitativa induktionsförsök man önskar. Vad man härvid ej bör underlåta, är att skaffa sig en magnetiseringskurva, och det går mycket lätt med hjälp av den ovan omnämnda elektromagneten, där man lätt kan anordna en sluten magnetisk krets.

Hur man skall ställa sig till frågan om den kvantitativa behandlingen av den »magnetiska kretsen», till den s. k. Ohmska lagen för magnetismen, vill jag beröra i en senare uppsats. Den hör enligt mitt förmenande ej hemma

[1] Med hjälp av en större cirkulär träram (58 cm. diam.), försedd med några trådvarv, har jag på detta sätt bestämt jordmagnetismens intensitet, sedan galvanometern kalibrerats ballistiskt på angivet sätt.

i vårt nuvarande gymnasium utan bör förläggas till specialstudiet.

Den som tagit del av ovanstående framställning har, hoppas jag, märkt att vad som en röd tråd genomgår det hela, är en strävan att få empiriskt underlag i största möjliga utsträckning. Och det erbjuder sig större möjligheter att med enkla medel erhålla ett sådant, då man följer de linjer, som här utstakats, än då man går de gamla vägarna, och man får på samma gång tillfälle att behandla väsentliga delar, som man förut förbigått.

De riktlinjer jag följt överensstämma ju till sin grundtanke med de av lektor Gallander framförda, men den här givna framställningen synes mig äga vissa fördelar framför dennes, vilka jag vill påpeka.

Som fundamentalförsök, då det gäller att introducera flödesenheten, gör G. ett försök med ett järnfritt induktorium.[1] Strömstyrkan i primärspolen ökas med konstant hastighet, och man observerar, att galvanometern, som är inkopplad i sekundärledningen, gör ett konstant utslag. Förutom det, att försöket ej tillhör de allra lättaste, så kan ur detsamma icke dragas den slutsats som behöves, nämligen att den inducerade strömmen är konstant, då flödet växer med konstant hastighet. Ty härför måste man förutsätta, att flödet är proportionellt mot strömstyrkan i primärrullen, vilket man naturligtvis ej vet, och vilket lektor G. ej heller förutsätter, emedan just detta visas sedermera vid fastställandet av enheten för magnetomotorisk kraft.[2]

Lektor G. har haft vänligheten upplysa mig om sin tankegång, och den är: man definierar och säger, att när galvanometerutslaget är konstant, så ökas flödet med konstant hastighet. Men på så sätt blir formeln 1 (sid. 15) en definition och ej empiriskt funnen.[3]

[1] Elementar elektricitetslära, § 32 a; Pedagogisk tidskrift 1919, sid. 4.
[2] Läroboken, § 33.
[3] Ett dylikt förfaringssätt, som man ju helst bör undvika, förekommer på ett annat ställe i läroboken (§ 17), liksom för övrigt även hos Moll,

En annan fördel hos den här givna framställningen synes mig vara att en enkel grund lägges för den ballistiska mätmetoden, varigenom möjliggöras absoluta och ej blott relativa flödesbestämningar. Det förfaringssätt, som G. skisserar,[1] är rätt så arbetsamt, är svårfattligare för lärjungarna, i det att det förutsätter en integration av ekv. (2) samt tillåter endast relativa mätningar.

Det torde vara överflödigt påpeka, att de som önska använda Gallanders lärobok, kunna göra det, även om de finna lämpligt vidtaga de här föreslagna modifikationerna, liksom den, som tills vidare anser sig förhindrad att taga steget fullt ut och ansluta sig till de nya riktlinjerna, lika väl kan betjäna sig av den beskrivna induktionsapparaten.

Till lektor Gallander, vilken jag har att tacka för impulsen till denna uppsats, och med vilken jag fört en givande korrespondens angående åtskilliga av de i densamma behandlade frågorna, uttalar jag mitt tack.

Nya elementarskolan i juni 1919.

nämligen vid definitionen av spänningsenheten, då Ohms lag I faktiskt definieras. Här är det emellertid svårare att finna någon annan ur pedagogisk synpunkt lämplig utväg.

[1] Pedagogisk tidskrift 1919, sid. 20.

Om arbetsbegreppet vid fysikundervisningen.

av SVEN EM. OHLON.

Införandet av arbetsbegreppet sker i de svenska och även i de flesta utländska fysikläroböckerna på det sättet, att arbetet dogmatiskt definieras som produkten av vägen och kraftens projektion i vägens riktning. I sammanhang därmed plägar det omnämnas, att vi genom denna definition befinna oss i överensstämmelse med det hävdvunna arbetsbegrepp, som möter oss i det dagliga livet, och som följaktligen envar har erfarenhet av.

Först efter det att arbetsbegreppet på detta sätt definierats, behandlas de enkla maskinerna och de exempel, som dessa ge på detta begrepps realitet.

Det synes mig, som om detta förfaringssätt vore onödigt abstrakt. På det åldersstadium, första ringen och sjätte klassen, där arbetsbegreppet först kommer i fråga vid fysikundervisningen, ha eleverna ej ännu den tillräckliga erfarenhet, varförutan nyssnämnda definition får över sig en viss godtycklighet. Undervisningen bör därför enligt min mening inriktas så, att eleverna liksom få behov av arbetsbegreppet som en självständig fysikalisk faktor. Under alla omständigheter kan man ej komma ifrån det rent formella tillvägagångssättet vid begreppets slutliga fastställande.

För att från början ge det fysikaliska arbetsbegreppet en fullt reell innebörd, brukar jag uppskjuta med dess behandling, till dess att det lutande planet, hävstången och blocket ha blivit genomgångna. Naturligtvis abstraheras från friktionens inflytande på det stadium, varom nu är fråga.

Man finner vid det lutande planet, att om kraften är parallell med planet, så är produkten af kraften och det lutande planets längd lika med produkten av lasten och planets höjd. Är däremot kraften parallell med planets bas, gäller det, att produkten av kraften och planets bas är lika med produkten av lasten och planets höjd. Vid hävstången finner man, för den händelse att endast tvenne krafter äro verksamma, att produkten av den ena kraften och den väg, som kraften föres vid en liten förflyttning, är lika med produkten av den andra kraften och dess motsvarande väg. Och samma lag erhålles vid blocken. Lagen, som gäller för blockets verkan, deduceras således icke med tillhjälp av statikens gyllene regel utan rent mekaniskt genom beräkning av spänningen i snörena vid varje särskilt fall.

Sedan eleverna sålunda vunnit kännedom om, hurusom produkten af kraft och väg spelar in som en konstant storhet vid de enkla maskinerna, är det lämpligt att framhålla för dem, att denna produkt är en fristående storhet av utomordentlig betydelse ej endast på detta område utan inom hela fysiken och inom all teknik. Arbetsbegreppet inställer sig på detta sätt hos lärjungarna såsom en ren nödvändighet.

För att komma fram till den allmännare arbetsdefinitionen kan man så påminna om det resultat, som erhölls vid det lutande planet, där det befanns, att arbetet hos den kraft, som verkar längs det lutande planet, är lika stort som arbetet hos den kraft, vilken verkar horisontellt. Genom en enkel geometrisk betraktelse vinner man ur detta speciella exempel den generella definitionen på arbete som produkten av vägen och kraftens projektion i vägens riktning eller som produkten av kraften och vägens projektion på kraftens riktning.

Men vad man uppnår med detta tillvägagångssätt är ej endast en åskådlig föreställning om arbetsbegreppets nödvändighet utan även en första föreställning om den allmängiltigaste av alla våra naturlagar, energiprincipen. Enligt

mitt förmenande bör man i detta sammanhang ej underlåta att omnämna denna princip och belysa dess roll vid alla mekaniska system. Sin första användning för deduktiv behandling vid fysikundervisningen finner så energiprincipen vid skruvens och decimalvågens teoretiska behandling.

Detta område av fysiken är av sådan natur, att deduktion och experiment oavbrutet böra komplettera varandra. Av vikt vid experimentens utförande är emellertid, att alla försök så mycket som möjligt frigöras från friktionens inflytande. I all synnerhet gäller detta om de experiment, som skola framskapa arbetsbegreppet. Först sedan detta begrepp blivit för lärjungarna fullt klargjort, övergår man till att belysa friktionens inflytande vid alla mekaniska system.

Mätning av låga temperaturer.

Av BENGT BECKMAN.

Den termodynamiska temperaturskalan utgår från de två fundamentalpunkterna: isens smältpunkt, $t = 0°$ C och vattnets kokpunkt vid ett tryck av 760 mm. Hg, $t = 100°$ C. För en ideell gas gäller lagen

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

där p, v beteckna tryck och volym vid $t°$, p_0, v_0 samma storheter vid 0° C, α är en konstant. Om gasens volym är konstant, få vi relationen

$$p = p_0 (1 + \alpha t).$$

Om vi hade en gastermometer med konstant volym fylld med en ideell gas, skulle vi erhålla värdet på konstanten α genom att bestämma trycket vid 0° och 100° C. Den termodynamiska temperaturen (t) definieras då genom ekvationen.

$$t = \frac{p - p_0}{\alpha p_0}.$$

Den termodynamiska temperaturskalan har sitt namn därav, att lord KELVIN givit densamma en teoretisk grundval genom tillämpning av termodynamikens andra huvudsats.

Vill man undvika det negativa tecknet för temperaturer under 0°, införes den absoluta temperaturen (T), definierad genom relationen

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273{,}1.$$

Den absoluta temperaturen skrives t. ex. $T = 20°{,}3$ K (Kelvin).

Alla gaser avvika mer eller mindre från det här definierade ideella tillståndet. Avvikelserna äro mindre ju högre temperaturen och ju lägre trycket är. Vätgas förhåller sig vid vanlig temperatur och måttligt tryck nästan som en ideell gas — avvikelserna äro ytterst små — och man har därför valt vätgas som normalsubstans för gastermometern. Utgångstrycket (p_0) har bestämts till 1000 mm. Hg. Vätgastermometern ger oss den internationella temperaturskalan; denna avviker från den termodynamiska med belopp, som för 50° C är endast 0,°001 men vid — 253° uppgår till mer än 0,°1. Beräkningen av dessa temperaturkorrektioner förutsätter, att man noga känner, hur produkten av tryck och volym hos gasen varierar vid olika tryck.

Vid mätning av låga temperaturer användes i främsta rummet vätgastermometern; den blir naturligtvis obrukbar, när temperaturen sjunkit så lågt, att vätgasen är nära att förtätas. Man begagnar sig då av heliumtermometern. För att hindra kondensation måste man i det allra lägsta temperaturintervallet använda en termometer, där heliumgasens tryck är mycket lågt. Kamerlingh Onnes hade vid sina tidigare försök med flytande helium en heliumtermometer, vars utgångstryck (p_0) var 145 mm.; vid heliums kokpunkt var trycket endast 3 mm. Det är då svårt att noggrant mäta det låga trycket i termometern. Kamerlingh Onnes har 1913 föreslagit som mätinstrument M. Knudsens mikromanometer med en på elektrisk väg upphettad tråd. Med denna kan ett tryck på endast 0,001 mm. noggrant mätas. Detta förslag har realiserats i Leiden, och det har visat sig, att man med en heliumtermometer, som är försedd med mikromanometer, kan mäta lägre temperaturer än förut.

Vid dessa mätningar tillkommer en ny felkälla, som beror på det termiska molekylartrycket. I en gastermometer äro de två behållare, som innesluta gasen och manometervätskan, förbundna med ett kapillärrör. Vi ha samma tryck i dessa, så länge rörets radie är mycket stor i för-

hållande till den fria medelväglängden hos gasmolekylerna. Vid mycket låga tryck är detta ej längre fallet, och det uppstår på båda sidor om kapillärröret en tryckdifferens, som i ogynnsamma fall kan uppgå till avsevärda belopp. Den korrektion, som måste anbringas, beräknas med ledning av KNUDSENS teoretiska arbeten.

För praktiskt bruk är gastermometern ej ägnad. Man använder därför *sekundära* termometrar, som jämföras med gastermometern. Vid låga temperaturer betjänar man sig mest av motståndstermometrar och i sällsynta fall av termoelement.

Motståndstermometrar för låga temperaturer tillverkas av olika material, vanligen av platina, guld eller bly. KAMERLINGH ONNES använder för temperaturer, som uppnås med flytande helium, termometer av manganin. En motståndstermometer består av en fin tråd, som lindas på ett rör av kvarts eller glas och förses med grövre tilledningstrådar. Motståndet kan i de flesta fall mätas med WHEATSTONES brygga. Vid mycket låga temperaturer blir dock motståndet så litet, att tilledningstrådarnas motstånd ej längre kan försummas, och man måste tillgripa en mätmetod, som eliminerar detta, t. ex. THOMSON-brygga, kompensationsmetod eller KOHLRAUSCH's metod med differentialgalvanometer.

Fig. 1 visar hur motståndet hos trådar av platina och manganin avtar, när temperaturen sjunker[1]; fig. 2 visar förloppet för den förstnämnda, två trådar av guld och en av bly i det lägsta temperaturområdet, som man uppnår med användande av flytande väte och helium. I intervallet 273° K till cirka 60° K är förloppet hos guld och bly nästan detsamma som för platina.

Vi se att motståndet hos platina och guld blir konstant vid mycket låg temperatur; ju renare tråden är desto mindre

[1] Utmed abskissaxeln är den absoluta temperaturen avsatt, utmed ordinataxeln förhållandet mellan motståndet W_T vid temperaturen T och motståndet W_{273} vid 273° K.

blir detta restmotstånd.[1] Det ligger nära till hands att antaga att restmotståndet beror på föroreningar och att absolut ren platina och rent guld vid omkring 5° K har oändligt stor elektrisk ledningsförmåga.

Hos bly däremot är förloppet ett annat. Motståndet minskar nästan lineärt till cirka 6° K, då metallen blir

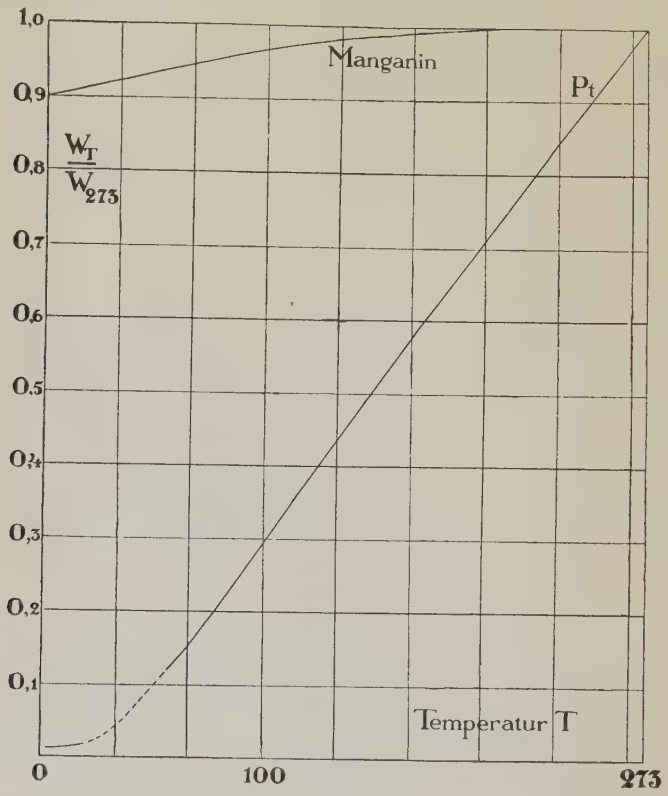


Fig. 1.

överledande och ledningsförmågan oändligt stor. Vid bly ha föroreningar en ganska obetydlig inverkan på motståndets temperaturkoefficient.

[1] I fig. 2 gäller kurvan Au_1 för en guldtråd med 0,005 % förorening, Au_2 för en med 0,015 %.

Av fig. 2 framgår att platina- och guldtermometern blir obrukbar vid ungefär 15° K.

Vid ej alltför låga temperaturer kan man approximativt skriva motståndet W_t vid temperaturen t under följande form

$$W_t = W_0(1 + at + bt^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

där W_0 är motståndet vid 0° C, a och b två konstanter. Hos platina och guld bero dessa konstanter i hög grad av metallens renhet; de visa för olika termometrar av samma metall skilda värden.

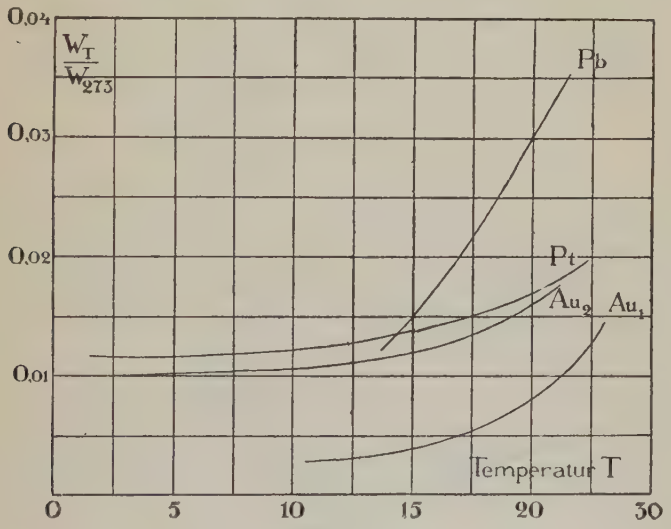


Fig. 2.

Varje motståndstermometer kan empiriskt graderas genom att man vid olika låga temperaturer jämför dess angivelser med gastermometern; med denna metod får man den noggrannaste graderingen. Man har då funnit att formeln (1) endast har approximativ giltighet. Som ett exempel härpå vill jag meddela följande. För en platinatermometer i Leiden bestämdes konstanterna (a, b) genom observationer vid 169° och 91° K; formeln gav tempera-

turen i intervallet 273° till 73° K med en noggrannhet av 0°,2. Vill man uppnå större noggrannhet och gå längre ned på temperaturskalan, måste andragradsuttrycket i formeln (1) ersättas av en mycket komplicerad funktion. Det är då bekvämare att grafiskt bestämma temperaturen ur den kurva, som representerar motståndet som funktion av temperaturen.

Vid de fall, då man ej fordrar så stor noggrannhet, kan man slippa den omständliga jämförelsen med gastermometern och använda en betydligt enklare metod, som är angiven av W. Nernst.

Motståndet (W') hos en platinatråd, som innehåller en liten tillsats av andra metaller, är alltid större än motståndet hos den rena metallen, W. Man kan skriva

$$W' = W + R$$

där R betyder ett restmotstånd, som beror på föroreningar. Detta är nästan konstant, d. v. s. oberoende av temperaturen (Matthiessens lag). Vi tänka oss, att motståndet hos tråden är 1 ohm vid 0° C och att den rena metallens motstånd är x ohm; restmotståndet är då $1-x$ ohm. Vid en annan temperatur t är trådens motstånd

$$W_t' = x \cdot f(t) + \overline{1-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$f(t)$ betyder där den temperaturfunktion, efter vilken den *rena* metallens motstånd varierar.

I Leiden har man bestämt funktionen $f(t)$ för platina. Genom observation i flytande helium har för en platinatråd restmotståndet $1-x$ uppmätts. För dessa temperaturer antages nämligen

$$f(t) = 0.$$

Vidare har funktionen $f(t)$ bestämts genom noggranna jämförelser med gastermometern vid olika temperaturer.

För en godtycklig platinatermometer mätes enligt Nernsts metod motståndet för *en* låg temperatur, t. ex.

— 183°,0 C, den temperatur, då trycket över flytande syre är 760 mm. Hg. Vi ha då

för $t = -183$

$$1 - W'_{-183} = x\,[1 - f(-183)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

och för en godtycklig temperatur t

$$1 - W'_t = x\,[1 - f(t)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

I ekvation (3) äro alla storheter kända utom x, som då beräknas. Med kännedom om x kan man sedan ur ekvation (4) beräkna en godtycklig temperatur. Som temperaturfunktion $f(t)$ kan man ofta nöja sig med

$$f(t) = 1 + at + bt^2.$$

Ekvationen (4) ger då

$$-at - bt^2 = \frac{1 - W'_t}{x},$$

varur temperaturen beräknas. Beräkningen kan också utföras grafiskt. Med denna metod är det möjligt att genom två mätningar, vid 0° och — 183° C, kalibrera en platinatermometer, som mellan rumstemperatur och — 200° C ger temperaturen säkert på 0°,1.

I det temperaturområde, som uppnås med flytande väte, från 20° till 15° K, använder Kammerlingh Onnes guldtermometer, Nernst däremot blytermometer. Vid heliumtemperatur, $T < 4°,3$ K bli dessa odugliga; Kammerlingh Onnes använder där manganin. Fig. 1 visar temperaturförloppet för motståndet hos denna legering. Vid rumstemperatur har den en ytterst liten temperaturkoefficient, som gör den lämplig till material i reostater. Motståndsförändringen är däremot vid heliumtemperatur tillräckligt stor för att manganin där skall kunna brukas som termometersubstans.

Som sekundära termometrar för låga temperaturer användes även termoelement, men denna metod har ej vunnit någon större spridning. Den termoelektromotoriska

kraften avtar vanligen vid sjunkande temperatur. Mest anlitade äro termoelement av koppar-konstantan och järn-konstantan.

Vid undersökningar, där man begagnar sig av en kondenserad gas som vätskebad, kan man ofta med tillräcklig noggrannhet mäta temperaturen genom att bestämma vätskans ångtryck. I köldlaboratoriet i Leiden låter man flytande syre, väte, helium etc. koka i en atmosfär av samma ämne som köldbadet.[1] Man mäter ångtrycket med en manometer, och temperaturen beräknas, då man känner den mättade ångans tryck vid olika temperaturer. I tabell 1 anföres sambandet mellan mättad heliumångas tryck (P) och temperaturen (T).

Tabell I.

T	P.
4°,3 K	760 mm.
3°,2 »	197 »
2°,4 »	51 »
1°,5 »	3 »

Vid den lägsta temperatur, som hittills uppnåtts, var ångtrycket hos helium 0,2 mm. Hg. Temperaturen uppskattades på så sätt, att den kurva, som erhålles ur tabellen, extrapolerades till trycket 0,2 mm. Härur fann Kamerlingh Onnes $T = 1°,2$ K.

[1] Se B. Beckman. Metallers elektriska ledningsförmåga vid låga temperaturer, denna tidskrift, junihäftet 1918, s. 211.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälningar.

I. J. Hjelmslev. *Geometriske Eksperimenter.* 2:den Udg. Kjöbenhavn 1919.

Det är icke ofta man får tillfälle att anmäla en matematisk bok, som, utan att vara en egentlig lärobok, dock är fullständigt elementär. Så är emellertid förhållandet med ovannämnda arbete, vilket därför torde förtjäna en något större uppmärksamhet från vår Tidskrifts sida.

Med »geometriska experiment» förstår författaren alla sådana konstruktioner, som ej låta utföra sig med de hävdvunna apparaterna passare och linjal, eller rättare med Euklides tre bekanta postulat, ty, såsom förf. riktigt anmärker, kan linjalen även användas på annat sätt än till att sammanbinda två punkter och att förlänga en rät linje, och passaren till annat än att upprita cirklar. Förf. skiljer därför skarpt på »konstruktioner», vilka utföras med dessa postulat, och »experiment», vilka utföras med andra hjälpmedel, t. ex. graderad linjal, trebenad passare, transportör (»flytteplan»), passaren använd på försök (»skridtforsøg») o. s. v.

Först visar förf., huru en mängd konstruktioner, t. ex. delning av en rät linje i tre lika delar, inskrivning av en cirkel i en triangel o. s. v., vilka kunna utföras med Euklideisk konstruktion, lättare fås genom dylika försök, en sak som väl varje matematiker plägar praktisera, för att sedan övergå till att finna skärningspunkterna mellan en cirkel och en konisk sektion samt till de båda berömda

»omöjliga» uppgifterna »trisectio anguli» och »duplicatio cubi», varefter han visar, att alla uppgifter som leda till ekvationer av tredje eller fjärde graden kunna lösas med hjälp av dessa båda, ett bevis, som väl hör till det vackraste i boken.

Sedan han därefter visat, att alla uppgifter, ledande till algebraiska ekvationer, kunna lösas med hjälp av dylika metoder, speciellt »flytteplanen», och angivit speciella metoder för vissa dylika såväl planimetriska som stereometriska uppgifter, så övergår han till transcendenta uppgifter.

Om dessa visas först och främst, att de icke kunna lösas genom förut upptagna metoder, varefter genomgås olika metoder för »quadratura circuli», samt några transcendenta kurvor, såsom cirkelns developpant och Archimedes spiral och deras användningar.

Ehuru boken just ej innehåller mycket, som ej förut är känt av matematikern, så kan den dock vara av ovärderlig nytta för den, som vill fördjupa sina kunskaper i elementargeometrin, och framför allt måste man anse, att den väl uppfyller det ändamål som förf. i företalet angiver, nämligen »at bane Vej for et lidt videre Syn end det, som paa dette Omraade har hersket siden Platons Dage».

M—r.

II. Tom Moll. *Astronomiska observationer i sjätte klassen och första ringen.* P. A. Norstedt & Söner, 1 kr. 10 öre.

Väl knappast om någon del av den fysikaliska kursen råder så olika meningar som om den stadgade astronomiundervisningen i första ringen och sjätte klassen: Under det att några lärare, såsom t. ex. herr Conrad Lönnqvist (se hans uppsats i denna tidskrifts 2:a årg., h. 3), huvudsakligen vilja använda densamma såsom en nyttig och intressant, ehuru jämförelsevis svår tillämpning på den matematiska kursen, så vilja andra, att den egentligen blott skall vara en rent populär framställning av de skenbara

och verkliga rörelserna, mer eller mindre historiskt framställd, samt ett dogmatiskt meddelande av vad man funnit angående himlakropparnas naturbeskaffenhet — i denna riktning går närmast Grenanders lärobok. Men slutligen finnas även andra som såsom huvudsak betrakta observationerna, som således vilja göra den till ett led i laborationsövningarna; och såsom målsman för dessa är det framför allt lektor Moll som framträder i ovannämnda lilla skrift, liksom den även är företrädd i åtskilliga efter den nya skolordningens införande utgivna läroböcker, såsom Noréns, Wahlgrens, Almqvist-Rendahls m. fl.

Om det stora värdet av en dylik undervisning — om den verkligen kan genomföras — torde det knappast vara delade meningar, särskilt på grund av det intresse den väcker hos lärjungarna, likasom det ju även allmänt erkännes, att införande av laborationsövningar säkerligen tillhör det bästa av den nya läroverksstadgans förändringar. Men härvid resa sig tvenne frågor som självmant inställa sig: Den första är, om lärjungarna på det ifrågavarande stadiet verkligen äro mogna för att utnyttja en sådan undervisning, den andra är, om det är rätt och rimligt att upptaga så mycket av lärjungarnas tid, som härtill behöves, för dylik, visserligen i sig själv mycket värdefull, men i jämförelse med andra ämnen dock tämligen onyttig kunskap.

Den förra av dessa frågor söker lektor Moll besvara genom att anföra några exempel ur vissa lärjungars redogörelser för försöken.

I min tanke säger detta icke mycket: lärjungarna i en klass äro alltid mycket olika i fråga om begåvning, utveckling och intresse, och undervisningen måste ställas för medeltalet, varken för de bästa eller för de sämsta. När nu lektor Moll anför 8 exempel på redogörelser för observationer, vilka alla, såsom helt naturligt är, icke äro gjorda på lärorummet, utan på lärjungarnas fritid, och om vilka man alls ej vet, om författarna tillhöra samma klass eller flera skilda årsklasser, ja ej ens om de äro gjorda utan

hjälp; så visar det visserligen, att herr Moll under ett antal år haft sammanlagt minst 8 intresserade och duktiga elever, som till fullo kunnat profitera av hans undervisning, men ingenting om dennas lämplighet för klasserna såsom helhet; och än mindre om huruvida en annan lärare med mindre lärarförmåga och rutin än hr Moll skulle kunna ernå någonting alls med samma metod.

Av ännu större vikt är emellertid den senare anmärkningen: Laborationer äro givetvis alltid nyttiga, men då tiden är begränsad, så gäller det att utvälja de områden, där det största möjliga utbyte kan vinnas med den minsta möjliga tidsuppoffring, och astronomin är just motsatsen till ett sådant område. Vi veta alla, huru i vårt klimat man ofta måste vänta dagar och veckor, ja månader, för att kunna göra en observation på just det föremål man önskar, och hur en redan påbörjad observation ofta måste avbrytas och den använda tiden således är i viss mån bortkastad. Man måste då fråga sig: Varför skall man just taga detta område till föremål för laborationer, då så många andra finnas, som med mindre tidsöda giva en lika god övning? Det skulle då ligga i själva *innehållets* värde. Men detta torde knappast någon på allvar vilja påstå, ty väl knappast något område inom fysiken eller kemin finnes, vars praktiska nytta är mindre än astronomins.

Om således skolans uppgift vore att utbilda astronomer, eller om våra lärjungar under ett år eller så ej hade annat att göra än att studera astronomi, så vore lektor Molls metod i allo förträfflig; men som förhållandena nu ställa sig vid våra allmänna läroverk, så torde det knappast vara tillrådligt att försöka densamma.

M—r.

III. V. W. Ekman. *Mekanik*. VIII + 543 sid. Stockholm 1919. P. A. Norstedt & Söners förlag. Pris 33 kr.

Det är ett värdefullt och intressant bidrag till vår vetenskapliga lärobokslitteratur, som härmed rekommenderas till matematik- och fysiklärares studium. Vid en mate-

matisk behandling av mekanikens problem ligger det nära till hands att nöja sig med de idealiseringar, som denna metod nödvändigtvis kräver. Författaren till den föreliggande läroboken har emellertid i eminent grad lyckats frigöra sig från denna ensidighet vid behandlingen av sitt ämne. Han griper alla tillfällen att upptaga närliggande praktiska frågor och ge dem en kvalitativ belysning i anslutning till de resultat som den kvantitativa behandlingen av det idealiserade problemet lämnat. Därigenom ger boken åtskilligt mer av praktiskt fysikalisk kunskap, än man är van att få i framställningar av mekaniken.

Även på annat sätt har förf. sökt göra ämnet mer levande, i det han grupperat innehållet kring mekanikens förnämsta banbrytare, Galilei, Kepler, Newton, Huygens. Kinematiken inledes, efter några biografiska notiser om Galilei, av en redogörelse för dennes studier över fall- och kaströrelse. I anslutning härtill införas de kinematiska grundbegreppen, vilka tillämpas på olika frågor rörande rätlinig och kroklinig rörelse. (I förbigående må anmärkas, att förf:s geometriska härledning av uttrycket för normalaccelerationen är väl knapphändig: det talas om dess riktning »längs normalen åt bankurvans konkava sida», men intetdera av begreppen oskulerande plan eller principalnormal beröres; vid den följande analytiska härledningen begränsar sig förf. uttryckligen till det fall, då banan är plan, och då kan ingen oklarhet uppkomma.) Förutom kaströrelse behandlas i kapitlet om partikelns kinematik även centralrörelse, speciellt planetrörelsen. På detta sätt införes nybörjaren genast i problem av fundamental betydelse.

Det närmast följande kapitlet, omfattande partikelns dynamik, synes mig såväl med hänsyn till problemurvalet som genom behandlingssättet vara ett av bokens intressantaste partier. Detta omdöme gäller även de inledande avdelningarna, om Newton och rörelselagarna. Det är ju alltid så, att framställningen av grundprinciperna är en särskilt vansklig uppgift. Författaren har lyckats lösa den

på ett både klarläggande och intresseväckande sätt. En invändning torde dock böra göras: därav att »en krafts verkan är oberoende av andra samtidigt verkande krafter» kan man ej utan vidare draga den slutsatsen, att de accelerationer, som krafterna var för sig skulle meddela en partikel, få sammansättas just genom geometrisk addition; rent logiskt sett vore någon annan kombination lika tänkbar. Det är därför ej utan skäl, som exempelvis de vanliga franska läroböckerna ge superpositionsprincipen en fylligare formulering. Men man är i gengäld förf. tacksam att slippa de i nämnda läroböcker förekommande utredningarna om att en konstant kraft åstadkommer en konstant acceleration, något som givetvis bör inläggas i själva definitionen på konstant kraft. — Det skulle föra oss för långt i detaljer att här närmare beröra de olika problem av allmänt eller mer speciellt slag, på vilka förf. sedan tillämpar de vanliga rörelseekvationerna och därur härledda allmänna lagar. Framhållas må endast, att den viktiga frågan om harmonisk rörelse fått en särskilt fyllig och givande behandling.

Efter ett kortare kapitel om stela kroppars kinematik följer så en utförlig framställning av statiken, utvecklad ur dynamiska synpunkter och väsentligen byggd på virtuella arbetets princip. Denna har i förf:s framställning erhållit en från den vanliga något avvikande formulering. Under antagande att tvångskrafterna ej förrätta något arbete och att övriga krafters sammanlagda arbete vid en virtuell förflyttning betecknas med δU, skriver förf. jämviktsvillkoret icke $\delta U = 0$, utan $\delta U / \delta s_n = 0$, där δs_n, förflyttningen för någon viss partikel, antages vara skild från noll och icke oändligt liten i förhållande till någon annan partikels förflyttning. Härigenom vinnes otvivelaktigt en viss fasthet vid bevisföringen. För tillämpningarna torde dock den vanliga formuleringen vara bekvämare och lika korrekt, om man blott framhåller, att vid beräkning av δU oändligt små kvantiteter av högre ordning ej skola medtagas, då det gäller bestämmande av själva jämviktsvillkoren, men

väl i frågor, som röra stabilitet. — Även i detta kapitel har den historiska synpunkten fått komma till sin rätt, icke genom någon geometrisk framställning av statiken i den gamla välkända stilen, men genom anknytning till Stevins, Leonardo da Vincis och Galileis idéer. — I tilllämpningarna på speciella statiska problem förekomma åtskilliga mycket detaljerade diskussioner. De äro otvivelaktigt erforderliga för en uttömmande behandling, men nekas kan ej, att denna del av boken härigenom fått en måhända avskräckande tyngd.

I det närmast följande kapitlet, som behandlar kroppars dynamik, redogöres inledningsvis för Huygens' arbeten, speciellt hans lösning av den fysiska pendelns problem. För övrigt nedlägger förf. mycken omsorg på att ge en klar uppfattning av innebörden och användbarheten av levande kraftens princip och rörelsemängdslagarna, varvid särskilt momentlagen belyses genom en hel del slående exempel. Även nästa kapitel, om stöt, ger en inblick i Huygens' tankegång. Värdet av denna hänvisning till banbrytarnas metoder är dubbelt: man måste beundra den genialitet, som kunde leda till målet på så mödosamma vägar, men man får också så mycket starkare intryck av vilken tänkandets ekonomi vetenskapens formella utveckling medfört.

I sista kapitlet, om relativ rörelse, läser man med särskilt intresse den geometriska framställningen av Coriolis' teorem. Förf. har dock synbarligen den riktiga känslan av att beviskraften hos dylika geometriska framställningar, vilka otvivelaktigt ge den bästa inblicken i det mekaniska förloppet, ej ligger lika klar som vid en analytisk behandling (särskilt med hänsyn till fixeringen av den inbördes storleksordningen hos oändligt små kvantiteter), och han kompletterar sin framställning med det vanliga analytiska beviset. Måhända hade en dylik dubbel behandling varit av värde även på ett par andra ställen. Men boken har i alla fall blivit rätt omfångsrik och — särskilt med hänsyn till att den är avsedd för de första studierna i ämnet —

dyr. Det vore önskvärt, att priset ej avskräckte alltför många, ty boken är värd att studeras, även av dem som närmast önska återuppliva gamla kunskaper. Läsningen av densamma har också kraftigt styrkt mig i en länge hyst övertygelse, att de som vilja utbilda sig till lärare i matematik och fysik ej borde få försumma att skaffa sig en fastare teoretisk grundval genom att ägna åtminstone någon sammanhängande studietid åt den rena mekaniken.

O. J—n.

Ett sätt att bestämma temperaturen på vatten vid dess största täthet.

För bestämning av temperaturen på vatten vid dess största täthet användes i våra skolor mest den i Molls fysik beskrivna apparaten. Nämnda bestämning kan dock lättare utföras med en c:a 1 dm. djup Dewarbägare. Denna avkyles under några minuter med isblandat vatten; därpå borthälles isen och bägaren fylles med c:a nollgradigt vatten. Sedan nedstickes däri en termometer med så stort avstånd mellan behållaren och skalans 0-punkt, att denna är synlig över kärlets kant, då behållaren kommer ned till bägarens botten. En annan termometer nedföres, så att dess behållare kommer i övre delen av vattnet. Ett par av de bästa eleverna i klassen få i uppgift att var 5:e minut avläsa och notera termometrarna, under det klassen i övrigt sysselsättes med problemlösning.

Såsom prov på resultaten från dylika försök medelst termometrar, graderade i tiondelsgrader, kan följande tjäna:

Övre term.	0,8	1,3	1,9	2,4	2,9	3,5	4,2	5,0	5,6	6,2	6,7
Nedre »	1,1	1,9	2,4	2,9	3,3	3,75	4,1	4,4	4,7	5,0	5,4
Diffens	−0,3	−0,6	−0,5	−0,5	−0,4	−0,25	+0,1	+0,6	+0,9	+1,2	+1,3

En Dewarbägare kostar några få kronor och är oumbärlig vid köldförsök (med flytande luft eller fast kolsyra) och några goda termometrar måste ju alltid finnas på ett fysikrum.

Det har ej lyckats mig att erhålla tillfredsställande resultat med vanlig bägare. Detta torde bero därpå, att även vid användning av mycket omsorgsfull värmeisolering temperaturstegringen sker relativt hastigt. De strömningar, som därvid uppstå för att ordna vattenlagren efter deras spec. vikt, drivas av krafter, som äro relativt små, då vattnet är nära 4°, emedan de spec. viktdifferenserna däromkring äro utomordentligt små. Dessa strömningar hinna därför ej åstadkomma önskad effekt såvida ej uppvärmningen sker så långsamt som i ett Dewar-kärl.

Otto Gallander.

Frågor och svar.

Fråga: Bör man säga »överkylt» eller »underkylt» vatten.

A. S.

Svar: Då man säger om en lösning, att den är övermättad, menar man, att koncentrationen är driven längre än normalt. Liknande är betydelsen av »över» i orden »överhettad» vattenånga etc. Sätter man »över» framför kyld, bör det enligt nämnda språkbruk betyda, att avkylningen drivits längre än normalt, således just vad som åsyftas. Använder man ordet underkyld, ledes tanken från själva fenomenet till den termometer, med vilken man konstaterar kylningen. Överkyld torde därför vara en lämpligare term än underkyld. Den i vårt land mest använda läroboken i fysik (Moll) använder också ordet överkyld.

Till jämförelse må nämnas, att fransmännen använda orden surfondu och surfusion och engelsmännen superfused och supercooling; däremot säga tyskarna unterkühlt och unterkühlung.

O. G—r.

Matematiska uppgifter.

49) Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i ändpunkterna av två mot varandra vinkelräta brännpunktsradier i en parabel. *S. B—n.*

50) Sök geometriska orten för den punkt, varifrån tre givna sfärer synas under samma synvinkel. *S. B—n.*

51) Om p är ett primtal >3, så är

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(p-1)^2$$

divisibelt med p. *M—r.*

52) Att finna alla en- och tvåsiffriga hela tal, som satisfiera ekvationen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, så att i varje fall de tre talen x, y och z ej alla hava någon gemensam faktor. *—dh—*

53) I en spetsvinklig triangel är summan av avstånden från vinkelspetsarna till höjdernas skärningspunkt lika med summan av de inskrivna och omskrivna cirklarnas diametrar. *N. F. Jenssen.*

54) På ena gavelväggen till en låda av dimensionerna $10^m \cdot 1^m \cdot 1^m$ sitter en fluga $0{,}1^m$ från bottnen och på lika avstånd från kvadratens båda vertikala sidor. På den motsatta gavelväggen är fästad en sockersmula, $0{,}1^m$ från lådans övre botten och likaledes på samma avstånd från kvadratens vertikala sidor. Hur lång är den kortaste väg som flugan behöver tillryggalägga för att nå sockersmulan?

Lösningar till uppgifterna i h. 3. 1918—19.

37) *I en likbent triangel är basvinkelns bissektris n gånger så stor som basen. Mellan vilka gränser måste n ligga?*

Kallas basen a och basvinkeln 2φ, så fås genast ur sinusteoremet $\frac{na}{\sin 2\varphi}=\frac{a}{\sin 3\varphi}$ $\quad\therefore n=\frac{\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi}=\frac{2\cos\varphi}{4\cos^2\varphi-1}$.

Detta uttrycks derivata är $\frac{2\sin\varphi(1+4\cos^2\varphi)}{(4\cos^2\varphi-1)^2}$, vilket är

positivt för alla ifrågakommande vinklar. Gränserna fås således genom att insätta $\varphi = 0$ och $\varphi = \frac{\pi}{4}$, således

$$\tfrac{2}{3} < n < \sqrt{2}.$$

(Löst av *A. E. Kofoed, C. H., X., O. D. Rasmussen, D. P—n* och *W. Rosén.*)

38) *Att i en given triangel inskriva en ellips med given brännpunkt.*

Om från en ellips' brännpunkt normalen fälles mot en tangent, så är orten för dess fotpunkt en cirkel med ellipsens medelpunkt till centrum och dess halva storaxel till radie. Härav fås konstruktionen: Fäll från den givna punkten normaler mot triangelns sidor och sammanbind fotpunkterna. Den nya triangelns omskrivna cirkel har samma medelpunkt som den sökta ellipsen, och dess radie är ellipsens större halvaxel.

(A. E. Kofoed, R. S., X.)

Man kan även konstruera den givna punktens symmetripunkter med avseende å triangelns sidor och sammanbinda de så erhållna punkterna. Denna triangels omskrivna cirkels medelpunkt är den andra brännpunkten, och dess radie är ellipsens hela storaxel. [Den så erhållna triangeln är förstoring i förhållandet 2 : 1 med avseende å den givna punkten av den i förra lösningen erhållna].

(O. D. Rasmussen, X.)

Man kan även stödja sig på (den föga kända) satsen, att två ellipstangenter göra lika vinklar med var sin av de linjer som sammanbinda deras skärningspunkt med de båda brännpunkterna, varigenom den andra brännpunkten erhålles. Storaxeln fås sedan genom satsen, att fotpunkterna till normalerna från brännpunkten mot tangenten ligga på den kring ellipsen omskrivna cirkeln. *(C. H.)*

39) *En p-planing, begränsad av n-hörningar, har alla sina hörn m-sidiga. Hur många diagonaler kunna dragas i densamma?*

Först är att anmärka, att m, n och p ej äro oberoende av varandra på grund av Eulers formel, att summan av

planens och hörnens antal är 2 större än kanternas antal. Vi få därför $p+\frac{pn}{m}-\frac{pn}{2}+2$ eller $m=\frac{2pn}{pn-2p+4}$, och hörnens antal $\frac{pn}{m}=\frac{pn}{2}+2-p$. Från vart hörn kan dragas en diagonal till vart och ett av de övriga hörnen, varvid dock var diagonal och var sidokant blir medräknad två gånger, och dessutom sidoytornas diagonaler bliva medräknade. Alla dessa linjer sammanräknade äro därför $\frac{1}{2}\left(\frac{pn}{2}+2-p\right)\left(\frac{pn}{2}+1-p\right)$. Om härifrån subtraheras kanternas antal $\frac{pn}{2}$ och sidoytornas diagonaler $\frac{pn}{2}(n-3)$, så fås de verkliga diagonalernas antal

$$d=\frac{1}{2}\left(\frac{pn}{2}+2-p\right)\left(\frac{pn}{2}+1-p\right)-\frac{pn}{2}(n-2).$$

För de platoniska kropparna fås då

	p	n	d
Tetraedern	4	3	0
Kuben	6	4	4
Oktaedern	8	3	3
Dodekaedern	12	5	100
Ikosaedern	20	3	36

O. Dybkær Rasmussen.

Införes även m i formeln fås

$$d=\frac{pn}{2m}\left(\frac{pn}{m}-mn+2m-1\right).$$

(C. H., D. P—n, X, Joh. Palm.)

40) *Produkten av alla hela positiva tal t. o. m. 1000 är ett tal, som slutar med 249 nollor.*

Av talen 1, 2, . . . 1 000 äro 200 divisibla med 5, 40 med 5^2, 8 med 5^3 och 1 med 5^4. Faktorn 5 finnes således $200+40+8+1$ gånger i $1\,000$. Faktorn 2 finnes många flera gånger, faktorn 10 således 249 gånger.

(Löst av *A. E. Kofoed, O. D. Rasmussen, D. P—n, C. H., C. M., R. S., W. Rosén, X, Joh. Palm.*)

41) *Två smeder börja samtidigt hamra på var sitt städ. Den ena slår 12 slag på 7 minuter, den andra 17 slag på 9 minuter. När under den första halvtimmen är tidsintervallet mellan ett slag av den ena och ett slag av den andra minst?*

A. behöver för ett slag $\frac{7}{12}$ minuter, således slår han x slag (oberäknat det första) på $\frac{7x}{12}$ min., den andra y slag (oberäknat det första) på $\frac{9y}{17}$ min. På 30 minuter gör A. $51^3/_7$, B. $56^2/_3$ slag. Antalet slag för B. är således vid den sökta tidpunkten 1, 2, 3, 4 eller 5 mer än för A. Men vi skola hava $\left|\frac{7x}{12}-\frac{9y}{17}\right|$ = minimum eller $|119x-108y|$ = min. Sättes då $y=x+t$, där t är 1, 2, 3, 4 eller 5, så fås

a) $|11x-108|$ = min.; $x=9^9/_{11}$ $\begin{cases} x=9 & m=-9 \\ x=10 & m=+2 \end{cases}$

b) $|11x-216|$ = min.; $x=19^7/_{11}$ $\begin{cases} x=19 & m=-7 \\ x=20 & m=+4 \end{cases}$

c) $|11x-324|$ = min.; $x=29^5/_{11}$ $\begin{cases} x=29 & m=-5 \\ x=30 & m=+6 \end{cases}$

d) $|11x-432|$ = min.; $x=39^3/_{11}$ $\begin{cases} x=39 & m=-3 \\ x=40 & m=+8 \end{cases}$

e) $|11x-540|$ = min.; $x=49^1/_{11}$ $\begin{cases} x=49 & m=-1 \\ x=50 & m=+10 \end{cases}$

Minsta intervallet fås således då A. gjort 49, B. 54 slag (oberäknat det första). A. har då använt $28^7/_{12}$, B. $28^{10}/_{17}$ min. Diff. $-\frac{1}{204}$ min. Koincidens kan först erhållas efter 63 min. då A. gjort 108, B. 119 slag (ober. de första).

(Löst av *C. H., D. P—n, C. M., X* och *W. Rosén.*)

42) *Två tresiffriga tal bestå av samma siffror i motsatt ordning. Det mindre talet drages från det större, och till*

differensen adderas densamma med siffrorna i motsatt ordning. Bevisa, att den så erhållna summan blir 1089 under förutsättning att första och sista siffran i det ursprungliga talet ej äro lika.

Låt talen vara $100x+10y+z$ och $100z+10y+x$, varest $10 > x > z$. Differensen $99(x-z)$ kan tydligen skrivas $100(x-z-1)+10\cdot 9+[10-(x-z)]$. Detta tal med siffrorna i omvänd ordning blir $100[10-(x-z)]+90+(x-z-1) =$ $= 1089 - 99(x-z)$, vilket, adderat till differensen $99(x-z)$ ger 1089. För $x-z=1$ blir differensen 99, vilket måste uppfattas som det tresiffriga talet 099, om satsen skall vara riktig. *X.*

(Även löst av *Joh. Palm, O. D. Rasmussen. D. P—n* och *W. Rosén.*)

Prisuppgift för 1919—20

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

Talet 1 001 001 001 001 är divisibelt med 11 111. Angiv en så generell regel som möjligt, av vilken ovanstående är ett specialfall.

Tre pris utdelas, bestående av värdefull nyare matematisk eller fysikalisk litteratur.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa jämnställda enskilda läroverk.

Tävlingsskrift bör vara till Red. insänd före d. 1 mars 1920.

Två lärjungar kunna gemensamt insända tävlingsskrift. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass bör meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Även lärares, studenters och andra personers lösningar mottagas med tacksamhet av tidskriften, fastän utom tävlan.

Om tals delbarhet.

Av KARL BLIX.

De båda vackra kriterierna för delbarhet med tal, som sluta på 1 och 9, vilka fil. stud. Runqvist givit i första häftet av denna årgång, kunna med lätthet härledas med tillhjälp av teorien för talkongruens, liksom ock liknande kriterier för delbarhet med tal som sluta på 3 och 7. För dem, som ej ha tillgång till någon lärobok i talteoriens elementer (en sådan är t. ex. Wertheim, Anfangsgründe der Zahlenlehre 1902), torde en framställning av några grundläggande kongruenssatser vara välkommen.

Definition: Två tal[1] a och b sägas vara kongruenta med avseende på modylen m eller med Gauss' beteckning $a \equiv b \pmod{m}$, om deras skillnad är delbar med m, d. v. s. om $\frac{a-b}{m} = k$ eller $a = b + mk$.

$a \equiv 0 \pmod{m}$ betyder alltså, att a är delbart med m. Så är t. ex. $10 \equiv 0 \pmod{2}$, ty 10 är delbart med 2, $10 \equiv 1 \pmod{3}$, ty $10 - 1 = 9$ är delbart med 3, och $10(7n+2) \equiv -1 \pmod{10n+3}$, ty $10(7n+2)+1 = 70n+21 = 7(10n+3)$ är delbart med $10n+3$.

Sats 1. Om $a \equiv b \pmod{m}$, så är $b \equiv a \pmod{m}$ och $-a \equiv -b \pmod{m}$.

Bevis: Enligt förutsättningen är $\frac{a-b}{m} = k$ och alltså $\frac{b-a}{m} = -k \therefore b \equiv a \pmod{m}$. Vidare är $\frac{-a-(-b)}{m} = -k \therefore -a \equiv -b \pmod{m}$.

[1] Här förstås med tal endast hela pos. eller neg. tal, 0 medräknat. Alla bokstavsbeteckningar avse därför endast sådana tal.

Sats 2. Om $a \equiv b \pmod{m}$ och $b \equiv c \pmod{m}$, så är $a \equiv c \pmod{m}$.

Bevis: Emedan $\frac{a-b}{m} = k$ och $\frac{b-c}{m} = k_1$, så blir $\frac{a-b}{m} + \frac{b-c}{m} = \frac{a-c}{m} = k + k_1$ $\because$ $a \equiv c \pmod{m}$.

Sats 3. Om $a \equiv b \pmod{m}$, så är $a+c \equiv b+c \pmod{m}$ och $a-c \equiv b-c \pmod{m}$.

Bevis: Emedan $\frac{a-b}{m} = k$, så blir $\frac{(a+c)-(b+c)}{m} = k$ $\because$ $a+c \equiv b+c \pmod{m}$ och $\frac{(a-c)-(b-c)}{m} = k$. $\because$ $a-c \equiv b-c \pmod{m}$.

Sats 4. Om $a \equiv b \pmod{m}$, så är $pa \equiv pb \pmod{m}$.

Bevis: Enligt föruts. är $\frac{a-b}{m} = k$ och alltså $\frac{pa-pb}{m} = pk$. $\because$ $pa \equiv pb \pmod{m}$.

Sats 5. Om $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, . . . $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, så är $a_1+a_2+ \ldots +a_n \equiv b_1+b_2+ \ldots +b_n \pmod{m}$.

Bevis: Enligt föruts. är $\frac{a_1-b_1}{m} = k_1$, $\frac{a_2-b_2}{m} = k_2$, . . . $\frac{a_n-b_n}{m} = k_n$ och alltså

$$\frac{(a_1+a_2+ \ldots +a_n)-(b_1+b_2+ \ldots +b_n)}{m} = k_1+k_2+ \ldots k_n.$$

$\because$ $a_1+a_2+ \ldots +a_n \equiv b_1+b_2+ \ldots +b \pmod{m}$.

Sats 6. Om $a \equiv b$ och $c \equiv d \pmod{m}$, så är $a-c \equiv b-d \pmod{m}$.

Bevis: Enligt föruts. är $\frac{a-b}{m} = k$ och $\frac{c-d}{m} = k_1$ och alltså $\frac{(a-c)-(b-d)}{m} = k - k_1$ $\because$ $a-c \equiv b-d \pmod{m}$.

Anm. Sats 3 kan även betraktas som följdsats till sats 5 och 6, då $c \equiv c \pmod{\text{godtycklig}}$.

Sats 7. Om $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2, \ldots a_n \equiv b_n$ (mod. m) så är $a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n$ (mod. m).

Bevis: Enligt förut. är $a_1 = b_1 + mk_1$, $a_2 = b_2 + mk_2, \ldots$ $a_n = b_n + mk_n$ och alltså $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n + mK$, där K inses vara ett helt tal. $\therefore a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n$ (mod. m).

Sats 8. Om $a \equiv b$ (mod. m), så är $a^n \equiv b^n$ (mod. m).

Bevis: Följer av föregående sats, om $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ och $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$.

Sats 9. Om $pa \equiv pb$ (mod. m) och därjämte p och m ej ha någon gemensam faktor, så är $a \equiv b$ (mod. m).

Bevis: Enligt förut. är $\frac{pa - pb}{m} = \frac{p(a-b)}{m} = k$. Då p och m ej ha någon gemensam faktor, inses att $a - b$ är delbart med m. $\therefore a \equiv b$ (mod. m).

Då endast en första orientering i kongruensläran här avses, skall blott ännu en sats angivas, som ger oss nyckeln till delbarhetskriteriernas gömslen.

Sats 10. Är $P = a_o + ba_1 + b^2 a_2 + \ldots + b^n a_n$ och $b \equiv c$ (mod. m), så är $P \equiv a_o + ca_1 + c^2 a_2 + \ldots + c^n a_n$ (mod. m).

Bevis: Av $b \equiv c$ (mod. m) följer (sats 8) $b^2 \equiv c^2 \ldots b^n \equiv c^n$ (mod. m) och (sats 4) $ba_1 \equiv ca_1$, $b^2 a_2 \equiv c^2 a_2, \ldots b^n a_n \equiv c^n a_n$ (mod. m) och alltså (sats 5 och 3)

$a_o + ba_1 + b^2 a_2 + \ldots + b^n a_n \equiv a_o + ca_1 + c^2 a_2 + \ldots + c^n a_n$ (mod. m).

Vi gå nu att medelst denna sats uppsöka kriterier för delbarhet med varje primtal och anmärka, att sådana kunna bildas i obegränsat antal.

1. Krit. för delbarhet med 2 och 5.

Om $P = a_o + 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^n a_n$, så blir, på grund av $10 \equiv 0$, $10^2 \equiv 0, \ldots 10^n \equiv 0$ (mod. 2 eller 5), $P \equiv a_o$ (mod. 2 eller 5) enligt sats 10. Är alltså $a_o = 0$ (mod. 2 eller 5), d. v. s. sista siffran delbar med 2 eller 5, så är (sats 2) $P \equiv 0$ (mod. 2 eller 5), d. v. s. talet delbart med 2 eller 5.

2. Krit. för delbarhet med 3 [eller 9].

Om $P = a_o + 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^n a_n$, så blir, på grund av $10 \equiv 1$, $10^2 \equiv 1^2, \ldots 10^n \equiv 1^n$ (mod. 3 [el. 9]), $P \equiv a_o +$

$+a_1+a_2+\ldots+a_n$ (mod. 3 [el. 9]). Är alltså siffersumman $a_o+a_1+\ldots+a_n \equiv 0$ (mod. 3 [el. 9]), så är $P \equiv 0$ (mod. 3 [el. 9]).

3. Krit. för delbarhet med tal, som sluta på 1 och alltså har formen $10n+1$.

Som man lätt märker är $10n \equiv -1$ (mod. $10n+1$), och på grund härav multipliceras $P=10a+b$ med n. Enligt sats 10 fås $10na+nb \equiv -a+nb$ (mod. $10n+1$). Är alltså $-a+nb \equiv 0$ eller (enl. sats 1) $a-nb \equiv 0$ (mod. $10n+1$), så blir (enl. sats 2) $nP \equiv 0$ (mod. $10n+1$). Då n och $10n+1$ äro relativa primtal,[1] följer av sats 9, att $P \equiv 0$ (mod. $10n+1$). Är alltså $a-nb$ delbart med $10n+1$, så gäller detsamma om $10a+b$. (Runqvists krit).

4. Krit. för delbarhet med tal, som sluta på 3 och alltså har formen $10n+3$.

Eftersom $10(7n+2) \equiv -1$ (mod. $10n+3$),[2] multipliceras $P=10a+b$ med $7n+2$, varefter erhålles $10(7n+2)a+(7n+2)b \equiv -a+(7n+2)b$ (mod. $10n+3$). På liknande sätt som nyss sluta vi, att om $a-(7n+2)b$ är delbart med $10n+3$, detsamma gäller om $10a+b$.

5. Krit. för delbarhet med tal, som sluta på 7 och alltså ha formen $10n-3$.

Emedan $10(3n-1) \equiv -1$ (mod. $10n-3$), multipliceras $P=10a+b$ med $3n-1$, och man får $10(3n-1)a+(3n-1)b \equiv -a+(3n-1)b$ (mod. $10n-3$), varav vi sluta

[1] Ty om n och $10n+1$ hade en gemensam faktor t. ex. p, så vore ju $n=pr$ och $10n+1=ps$, således $p(10r-s)=-1$, vilket är orimligt, om ej $p=\pm 1$, vilket strider mot antagandet.

[2] För att finna denna kongruens har man tydligen att bestämma x så, att $10x \equiv -1$ (mod. $10n+3$). Lätt inses att x måste ha formen $\alpha n+\beta$, där α och β kunna bestämmas på följande sätt:

$$\frac{10x+1}{10n+3}=\frac{10(\alpha n+\beta)+1}{10n+3}=\frac{\alpha\left(10n+\frac{10\beta+1}{\alpha}\right)}{10n+3}=\text{ett helt tal, om } \frac{10\beta+1}{\alpha}=3.$$

Denna s. k. diafantiska ekv. ger $\begin{cases}\alpha=-13;\ -3;\ 7;\ 17;\\ \beta=-4;\ -1;\ 2;\ 5;\end{cases}$ o. s. v. Om man då väljer det minsta pos. värdet på α, blir $x=7n+2$. I samband härmed kan påpekas, att det ej finns x-värden, som satifiera $100x \equiv -1$, $1000x \equiv -1$ o. s. v. (mod. $10n+3$).

som förut, att, om $a-(3n-1)b$ är delbart med $10n-3$, detsamma gäller om $10a+b$.

Anm. Sättes $n=1$, fås det bekanta kriteriet att $10a+b$ är delbart med 7, om $a-2b$ är det.

6. Krit. för delbarhet med tal, som sluta på 9 och alltså ha formen $10n-1$.

Bemärka vi, att $10(9n-1)\equiv -1 \pmod{10n-1}$, få vi på liknande sätt som i föregående, att, om $a-(9n-1)b$ är delbart med $10n-1$, detsamma gäller om $10a+b$.

Anm. Genom att utgå från $10n\equiv 1 \pmod{10n-1}$ komma vi till Runqvists krit.: är $a+nb$ delbart med $10n-1$, gäller detsamma om $10a+b$.

Sammanfattning: Talet $10a+b$ är delbart *a*) med $10n+1$, om $a-nb$, *b*) med $10n+3$, om $a-(7n+2)b$, *c*) med $10n-3$, om $a-(3n-1)b$, *d*) med $10n-1$, om $a-(9n-1)b$ är delbart med samma tal.

Ex. Talet 6 789 899 skall undersökas i fråga om delbarhet med 31, 23, 107 och 89. Uppställningen förstås, om jag påpekar att $678\,989-3\cdot 9=678\,962$, ur vilket tal nytt prövningstal skall bildas, vadan sista siffran sättes i rubriken *b*.

$31=10n+1$; $n=3$			$23=10n+3$; $n=2$			$107=10n-3$; $n=11$			$89=10n-1$; $n=9$		
$n=3$			$7n+2=16$			$3n-1=32$			$9n-1=80$		
a	*b*	$3b$	*a*	*b*	$16b$	*a*	*b*	$32b$	*a*	*b*	$80b$
678 989	9	27	678 989	9	144	678 989	9	288	678 989	9	720
67 896	2	6	67 884	5	80	67 870	1	32	67 826	9	720
6 789	0	0	6 780	4	64	6 783	8	256	6 710	6	480
678	9	27	671	6	96	652	7	224	623	0	0
65	1	3	57	5	80	42	8	256	62	3	240
6	2	6	−2	3		−21	4		−17	8	
	0										

Då 0 är delbart med 31, −23 med 23, −214 med 107 och −178 med 89, så är också 6 789 899 delbart med nämnda tal.

Är Ohmska lagen en experimentell eller en rationell lag?[1]

(Historisk undersökning)

Av AD. MEYER.

Det har ofta förefallit mig egendomligt, att vid den fysikaliska undervisningen, liksom i läroböckerna, det nästan aldrig göres någon skillnad mellan de lagar, som äro rent rationella, således av matematisk natur eller blott innefattande definitioner, och sådana som äro experimentella. Och dock är denna skillnad i själva verket synnerligen viktig: de förstnämnda lagarna äro nämligen exakt riktiga, under det att de senare i regeln endast äro approximativa. Så t. ex. om vi taga lagen för utvidgning genom värme

$$l = l_0 + l_0\ t,$$

så är det rent axiomatiskt klart att tillskottet måste vara proportionellt mot längden l_0. Detta har heller aldrig någon sökt att experimentellt bevisa, utan alltid utgått därifrån såsom självklart. Ett motsatt antagande skulle påminna om den bekanta historien om skräddaren, som mottog en meter tyg och försäkrade att hälften hade bortgått i krympningen, och då han sedan underrättades om att på ett helt stycke om 20 m. blott $^1/_2$ m. förlorades genom krympning, så förklarade han att kunden hade haft otur och av stycket just fått den halva metern som krympte.

Att däremot tillskottet just är proportionellt mot temperaturtillskottet är blott ett experimentellt faktum och

[1] Föredrag hållet på Fysiska Sällskapet i Stockholm.

därför även endast approximativt riktigt, detta naturligen under förutsättning att jag ej talar om just den kropp som användes såsom normaltermometer.

Tydligen är det av ganska stort intresse att i varje fall kunna särskilja vad som är matematiskt bevisat och vad som blott är ett experimentellt faktum.

Emellertid ligger saken ingalunda alltid så tydligt till rätta som i det ovan anförda exemplet: det finnes en del lagar, som från början blott funnits genom experiment, men där man, trots ivriga undersökningar, ej lyckats konstatera några avvikelser, och för vilka man sedan byggt upp en teori som gör dem till matematiska lagar under förutsättning att denna teori är riktig, såsom t. ex. Cartesii brytningslag; eller sådana som, efter att först hava funnits genom experiment, fått en så vidsträckt tillämpning inom naturvetenskapens olika grenar, att vi alls ej längre kunna tänka oss dem annat än såsom tankenödvändigheter, såsom t. ex. värmeteoriens huvudsatser, materiens oförstörbarhet o. s. v.

Under sådana förhållanden är det ofta nödvändigt att gå till lagens uppkomsthistoria för att kunna konstatera dess natur. Det är en dylik undersökning som det här är min mening att verkställa beträffande Ohmska lagen.

När man betraktar formeln för Ohmska lagen $s = \frac{V}{R}$, där V är potentialskillnaden mellan två punkter och R motståndet mellan dem, så påminnes man osökt dels om den vanliga formeln för likformig rörelse $h = \frac{v}{t}$, dels om kraftekvationen $a = \frac{K}{M}$, där a är accelerationen, K kraften och M massan.

Den förra av dessa är ju otvivelaktigt en rent matematisk lag, en definition av hastighet vid likformig rörelse, och behöver därför på intet sätt någon experimentell bekräftelse. Skulle något experiment synas strida mot den-

samma, så säga vi ej därför att formeln är oriktig, utan blott att den ifrågavarande rörelsen ej är likformig. Den senare formeln vilja vi nu först undersöka, då dess natur är något lättare att komma underfund med, än den Ohmska lagens, för att sedan analogt betrakta den senare.

I denna formel är a en i alla avseenden väldefinierad storhet, som omedelbart kan iakttagas, under det att kraften alltid är något hypotetiskt, om vilket vi egentligen ej veta något annat än att det är »det som frambringar acceleration». Att vi över huvud taget införa detta begrepp beror därför blott på att vi ej kunna tänka oss en verkan utan orsak. Denna orsak måste vi emellertid då tänka oss liggande utanför kroppen, ty om kroppen gåve sig själv acceleration, så vore det just en verkan utan orsak.

Men när vi således om kraften ej veta något annat, än att den frambringar acceleration, så är det enklaste antagande vi kunna göra om densamma eller, om man så vill, definition av densamma, att den är proportionell mot accelerationen.

Detta, att $a = k \cdot K$, blir då kraftens *dynamiska definition*, varvid naturligen lämnas obestämt, huruvida k är en ren konstant eller beroende av den accelererade kroppens natur e. d. Emellertid finnes även ett *statiskt* kraftbegrepp, nämligen det som yttrar sig såsom spänning, tryck o. s. v. Frågan blir således, om dessa båda kraftbegrepp äro ett och detsamma, eller om de kanske blott genom en populär missuppfattning fått samma namn. För att avgöra detta iakttaga vi, att ett statiskt tryck alltid är åtföljt av ett lika starkt i motsatt riktning, och att, om det senare upphäves, följden alltid blir en acceleration. Det finnes således intet skäl att ej identifiera de båda kraftbegreppen, så att accelerationen, enligt D'Alemberts princip, så att säga kommer att vikariera för mottrycket.

Men nu visar erfarenheten, att om två olika kroppar utsättas för samma tryck, spänning e. d., och intet mottryck kan äga rum, så blir accelerationen i allmänhet olika. Accelerationen måste således även vara beroende

av något annat än kraften. Vi måste därför sätta den proportionell även mot en annan faktor, och denna faktor sätta vi $= \frac{1}{M}$, och kalla M för kroppens massa.

Vi få således formeln $a = k \cdot \frac{K}{M}$, vilken genom att välja enheterna övergår i den vanliga $a = \frac{K}{M}$.

Vi se således, att kraftekvationen i sig själv ingalunda är en experimentell formel, utan snarast är att betrakta såsom en *definition* av begreppet massa då kraftbegreppet är definierat på statiskt sätt. Detta bestyrkes även av, att den ej är, eller ens kan vara, approximativ, utan måste vara exakt, ty om vi tänkte oss möjligheten av att ett experiment skulle synas strida mot densamma, så skulle vi ej därför förklara formeln ogiltig, utan blott säga, att vi måste modifiera definitionen av begreppet massa, såsom vi ju måste göra i fråga om vissa elektriska urladdningsfenomen, där vi antaga massan beroende av hastigheten. Det som uti lagen är experimentellt är således icke dess formulering, utan snarare de båda underförstådda postulaten 1) att det dynamiska och det statiska kraftbegreppet äro identiska och 2) att massan blott är beroende av kroppens volym och beskaffenhet. Om vi icke gjorde dessa båda postulat, så skulle det ej kunna finnas något reduktionstal mellan den gamla kraftenheten *kilogram*, som är definierad såsom ett tryck, och den nya *dyn*, som är definierad genom massa och acceleration.

*

I fråga om Ohmska lagen möter ett dylikt betraktelsesätt betydligt större svårigheter på den grund att strömstyrkan kan definieras på flera olika sätt, och vid mina studier i Ohms och Fechners originalavhandlingar har jag även på flera ställen träffat på en »quaternio terminorum», som har sin grund däri. Ja Ohm själv, som dock var en

synnerligen skarpsinnig teoretiker, är ej alldeles fri därifrån, och vissa divergenser mellan dessa båda forskare skulle säkert bortfallit, om de haft en bestämd definition att utgå ifrån.

Jag vill framställa saken historiskt: Ohms första avhandling i frågan publicerades i Poggendorffs annaler 1825 och bär titeln »Vorläufige Anzeige des Gesetzes nach welchem die Metalle die Contaktelektricität leiten». Här inför han i en ström, vars styrka mätes genom en magnetnål, upphängd i en ej närmare beskriven apparat, liknande Coulombs torsionsvåg, en variabel längd x av en tråd, och finner därigenom rent experimentellt lagen $s=\frac{a}{b+x}$, där a och b äro konstanter vilkas värde framgår ur experimentet, men om vilkas teoretiska betydelse han alls ej yttrar sig. Här bedömer han således helt enkelt strömstyrkan genom magnetnålens avvikning. I sitt stora teoretiska arbete »Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet», Berlin 1827, har han däremot helt och hållet slagit om: Här utgår han från begreppet »elektroscopische Kraft» i en viss punkt av en ledare, och tänker sig denna kraft mätt genom att punkten sättes i ledande förbindelse med ett kondensationselektroskop. Detta uttryck, elektroskopisk kraft, som han betecknar med bokstaven u, är således alldeles detsamma som vi numera benämna potential. Vidare utgår han från tre fundamentalsatser, nämligen:

1) Elektricitetens övergång sker blott mellan närliggande element, och denna övergång är proportionell mot potentialdifferensen dem emellan, analogt med Fouriers och Poissons teori för värmets ledning.

2) Inverkan mellan ledaren och luften kan vid teorins utarbetande försummas.

3) Om två olika kroppar beröra varandra, så härskar vid beröringsstället alltid en konstant potentialskillnad.

Slutligen antar han som självklart, att elektricitetstransporten måste vara lika stor genom varje tvärsnitt av

en ledare, nämligen sedan strömmen blivit konstant. Detta kan anses vara definition på en konstant ström; varav även följer att Ohms lag ej omedelbart kan tillämpas på t. ex. en högfrekvent växelström, där strömmen aldrig hinner bliva konstant.

Detta betraktelsesätt, att elektricitetstransporten måste vara lika i varje tvärsnitt, vilket Ohm utan vidare använder, har blivit klandrat, i det att man sagt, att detta förutsätter att elektriciteten skulle vara ett ämne, jämförbart med t. ex. vatten; men jag tror att denna anmärkning icke har fullgoda skäl för sig och närmast beror på att man icke gjort klart för sig betydelsen av »ett ämne». Materien existerar nämligen för oss icke annat än som den hypotetiska bäraren av energien, och att i det tillstånd vari en jämn elektrisk ström befinner sig, ett tillstånd som — för att tala med Ohm — »kommer jämvikten så nära som möjligt», lika stor kvantitet energi måste utgå som inkomma i ett tvärsnitt, torde vara lika axiomatiskt, vare sig vi benämna bäraren av denna energi »ett ämne» eller kort och gott »elektricitet». De övriga förutsättningarna kunna ju, om man så vill, sägas vara tagna ur erfarenheten, men i själva verket innebära de intet annat än det faktum att en konstant ström genomgår kedjan, och Ohm reserverar sig även uttryckligen mot de oregelbundenheter som kunna följa av kemiska förändringar inom stapeln eller dylikt.

Ur dessa enkla förutsättningar härleder han nu grundformeln för potentialen i en godtycklig punkt av kedjan

$$u = \frac{A}{L} \cdot y - O + c,$$

varest A är hela kedjans elektromotoriska kraft, d. v. s. algebraiska summan av alla potentialsprången, L är hela kedjans »reducerade längd», d. v. s. ledningsmotstånd $\Sigma' \frac{x}{k\omega}$, ($x$ ledarens längd, ω dess tvärsnitt, k dess sp. ledningsförmåga) y likaledes den reducerade längden av avståndet

från ett godtyckligt origo till den variabla punkten, och O algebraiska summan av potentialsprången mellan dessa punkter, samt c en konstant. Vidare visar han, att elektricitetstransporten per tidsenhet genom ett tvärsnitt av ledaren måste vara $\frac{du}{dy} = k\omega \frac{du}{dx}$ och således $= \frac{A}{L}$.

Sedan härleder han ur denna lag alla de satser som vi äro vana att taga ur Ohmska lagen, t. ex. om fördelaktigaste kombinationen av staplar och av galvanometrar, om lagarna för strömförgrening o. s. v.

Så till vida är således allt gott och väl, och någon lucka i Ohms bevisföring — vilken för säkerhets skull först utföres i geometrisk bild och sedan rent analytiskt — torde väl svårligen kunna påvisas.

Men vad har han egentligen härmed bevisat? Jo, att elektricitetstransporten följer Ohmska lagen. Men denna elektricitetstransport sätter han sedan lika med strömstyrkan, utan att på något sätt bevisa att den är proportionell med den kraft som t. ex. påverkar en magnetnål, en definition på strömstyrka som han dock själv förut använt i sin föregående avhandling.

I sammanhang härmed förtjänar anmärkas ett egendomligt resonemang, som Ohm gör i en not till en senare avhandling i Schweiggers Journal för 1830: Han vill vederlägga en del inkast, som vissa experimentalfysiker gjort mot hans teori, och säger då, att deras experiment ej överensstämma med sig själva och varandra, i det att de använda olika metoder för att bedöma strömstyrkan, t. ex. »die Kraft des Erglühens», och påstår att om man sätter $s = k\omega \frac{du}{dx}$, så är »die Glühkraft» $= \frac{du}{dx}$ $\left(\text{således} = \frac{s}{k\omega}\right)$, värmeinnehållet $= \omega \frac{du}{dx}$ $\left(\text{således} = \frac{s}{k}\right)$ och den kemiska verksamheten $= k \frac{du}{dx}$ $\left(\text{således} = \frac{s}{\omega}\right)$, men den magnetiska kraften $= k\omega \frac{du}{dx}$ (således $= s$). Detta påstår han utan något

vare sig teoretiskt eller experimentellt bevis. Vi se tydligt, att han ej känner Jouleska lagen, vilken ju först uttalades år 1841, och ej heller den mekaniska värmeteorin. Varifrån han fått sina påståenden, har jag ej lyckats utleta.

*

Under sådana förhållanden är det ytterst naturligt, att tidens fysiker icke ville utan vidare undersökning acceptera den Ohmska lagen; och särskilt har *G. T. Fechner* nedlagt ett oerhört arbete på att undersöka densammas riktighet. Fechners experimentella undersökningar, som först publicerades i en mängd tidskriftsartiklar och i hans översättning av Biots lärobok, äro sammanfattade i hans skrift »Massbestimmungen über die galvanische Kette», Leipzig 1831.

Fechner använder sig uteslutande av strömmens magnetiska kraft för att bestämma dess storlek; och härvid är att märka, att han helt och hållet förkastar avvikningsmetoden och i dess ställe låter strömmen gå så, att den förstärker jordmagnetismens verkan på nålen, och räknar svängningarna som denna gör dels under jordmagnetismens inverkan ensamt, dels under dennas och strömmens förenade inverkan. Han får då såsom mått på strömmens styrka $\frac{1}{N_1^2} - \frac{1}{N^2}$, då N och N_1 äro antalet svängningar per tidsenhet, som nålen gör dels under endast jordmagnetismens, dels under dennas och strömmens förenade inverkan. Mot denna metod gör, i förbigående sagt, Ohm starka invändningar.

Fechner föresätter sig att göra undersökningar över 17 punkter, av vilka följande äro de viktigaste.

1) Bevis för att strömstyrkan i strömmens olika delar växa och avtaga proportionellt. Han inför i kedjan två galvanometrar av mycket olika konstruktion, och visar att de magnetnålarna påverkande krafterna ändras proportionellt, på vad sätt strömmen än förstärkes eller försvagas.

2) Bevis för att strömstyrkan är lika i kedjans olika delar. Han låter en magnetnål oscillera över olika delar av strömledningen på konstant avstånd från desamma, därvid antagande att blott de närmaste delarna av ledningen inverkar på magneten.

Han har tydligen insett, att för detta bevis Ampèrmeter ej kan användas, då en sådan alltid måste graderas med hjälp av just den sats som skulle bevisas, så att ett dylikt bevis, vilket ju stundom ännu användes vid undervisningen, alltid blir ett cirkelbevis.

3) och 4) Konstaterande av att motståndet är direkt prop. mot längden och omvänt mot genomskärningsytan, såväl för fasta som flytande kroppar, samt konstaterande av lagarna för delad ström.

5) Bevis för att E. M. K. ej är beroende av de berörande ytornas storlek.

6) Bevis för att motståndet icke är lika med summan av den fasta och flytande ledarens motstånd, utan att det dessutom tillkommer ett övergångsmotstånd dem emellan.

Detta är den enda punkt, där han kommer i verklig kollision med Ohm, och detta har även framkallat en skarp strid mellan dem. Sedan har det visat sig, att ett sådant övergångsmotstånd verkligen existerar, ehuru ej av den betydelse, som Fechner tillskriver detsamma.

De övriga punkterna spela ingen roll för den sak här är fråga om.

*

Om vi således nu gå att ur det föregående undersöka Ohmska lagen på samma sätt som vi förut gjort med kraftekvationen, så finna vi:

1) Den Coulombska lagen ger oss en *definition av elektricitetsmängd.* Coulombs experiment kan nämligen experimentellt endast giva oss lagen för *avståndets* inverkan på repulsionen eller attraktionen; det övriga måste fattas såsom definition av det förut odefinierade begreppet elektricitetsmängd och har intet med experiment att göra.

2) *Elektrisk potential* i en punkt kan sedan definieras såsom det arbete som fordras för att föra elektricitetsmängden $+1$ från oändligt avstånd till den ifrågavarande punkten.

3) Om *strömstyrkan* definieras såsom den elektricitetsmängd som på tidsenheten genomgår ledarens tvärsnitt, så följer ur allmänna principer, att den t. ex. i en jämntjock, homogen ledare under i övrigt lika förhållanden måste vara proportionell mot potentialdifferensen mellan ledarens ändpunkter.

4) Under sådana förhållanden kan därför Ohmska lagen $s = \frac{V_1 - V_2}{R}$ betraktas såsom definition av begreppet *ledningsmotstånd.*

5) På grund av att strömstyrkan måste vara lika i ledarens olika delar är då lätt att matematiskt bevisa, att *ledningsmotståndet måste vara proportionellt mot ledarens längd,* t. ex. på följande sätt:

Låt AB vara en homogen och jämntjock ledare och potentialerna i punkterna A och B vara V_1 och V_2 resp. Då är potentialen i dess mittpunkt C

$$\frac{V_1 + V_2}{2},$$

ty då ledaren är homogen och jämntjock, så kan intet skäl finnas, varför ej potentialen skall falla utefter en rät linje, vilket Ohm ständigt förutsätter.

Om då motståndet i hela ledaren är R och i halva ledaren R_1, så är

$$s = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{V_1 - \frac{V_1 + V_2}{2}}{R_1} = \frac{V_1 - V_2}{2R_1},$$

således $R = 2R_1$; och på samma sätt, om den delas i flera delar.

6) Likaledes kan man bevisa, att ledningsmotståndet är omvänt proportionellt mot genomskärningsytan, ty låt

i en homogen ledare AB stycket AC hava dubbelt så stor genomskärningsyta som BC. För att då på tidsenheten lika stor elektricitetsmängd skall genomgå de båda tvärsnitten, så måste elektriciteten i BC få dubbelt så stor hastighet som i AB, vilket på grund av den första grundprincipen icke kan ske på annat sätt, än att potentialfallet per längdenhet är dubbelt så stort i BC som i AB. Kallas då motståndet per längdenhet i AB och BC för R och R_1, så är

$$s = \frac{V_1 - V_2}{l \cdot R} = \frac{V_3 - V_4}{l R_1}; \text{ vadan } \frac{R}{R_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_3 - V_4} = \frac{1}{2},$$

då med $V_1 - V_2$ och $V_3 - V_4$ menas potentialfallet på lika långa stycken (l) av de båda delarna. Vi få således $R = k \cdot \frac{l}{\omega}$, vilket tjänar såsom definition på specifikt ledningsmotstånd.

7) Ur den anförda definitionen på strömstyrka kan, som bekant, Jouleska lagen härledas rent teoretiskt ur den mekaniska värmeteorin, så att det verkligen finnes en metod att mäta strömstyrkan, definierad på detta sätt.

Det som således återstår och måste visas genom experiment är då, frånsett en möjlig prövning av de Ohmska grundprinciperna, följande:

1) Att den »elektricitet» som av den galvaniska strömmen förflyttas genom en ledare är identisk med det statiska elektricitetsbegreppet.

2) Att den kraft, varmed en ström påverkar en magnetnål, är proportionell mot den per tidsenhet genomgångna elektricitetsmängden; att således strömmen (i den Ohmska bemärkelsen) kan mätas genom tangentbussol eller genom Fechners oscillationsmetod eller genom andra galvanometrar.

3) Att strömmens kemiska verksamhet, således den kvantitet väte, som per tidsenhet frigöres, likaledes är

proportionell mot strömstyrkan; således att strömmen kan mätas genom voltameter.

4) Undersökning huruvida en sammansatt ledningskedjas motstånd är lika med summan av de särskilda delarnas motstånd, eller om det tillkommer något »övergångsmotstånd» e. d.

Det är, enligt min tanke, häruti som framförallt betydelsen av Fechners och Pouillets experimentella studier av Ohmska lagen ligger. Det är således icke så mycket själva Omska lagens sanning, som icke fastmera dess praktiska användning som genom dessa experiment ådagalägges.

Om modern framställning av Ohms lag.[1]

Av OTTO GALLANDER.

Lektor Meyer har lämnat en intressant redogörelse för Ohms tankegång, då denne forskare uppställde sin viktiga lag samt för Fechners sätt att komplettera Ohms teoretiska undersökningar med nödvändiga experiment. Liksom vid all forskning är den först funna vägen till ett vetenskapligt resultat mycket mer svårframkomlig än senare tiders. För att kunna framhålla denna olikhet vid behandlingen av ifrågavarande lag tillåter jag mig lämna ett kort referat av vår tids sätt att framställa densamma.

De nödvändiga experimenten och tolkningen av dem bliva väsentligt olika, beroende på de utgångspunkter man väljer.

Den elektriska potentialdifferensen har åtskilliga verkningar, och man kan kvantitativt definiera potentialbegreppet, genom vilken av dessa man vill.

I den av lektor Meyer refererade framställningen har man valt dess s. k. statiska verkan. Nu däremot definierar man potentialdifferens i anslutning till gällande internationella definitioner på de elektriska enheterna genom den elektriska ström, som den frampressar genom en ledare.

De experimentella fakta, på vilka denna framställning bygger, äro:

1. Styrkan av en konstant elektrisk ström, definierad genom dess elektrolytiska verkan, är lika i alla sektioner av en ogrenad ledning.

[1] Diskussionsinlägg med anledning av föregående föredrag.

2. I en grenad ledning är strömstyrkan i huvudledningen lika med summan av strömstyrkorna i grenledningarna.

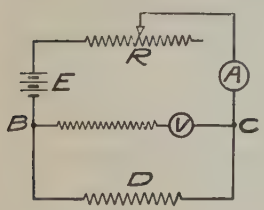
3. I ett grensystem av oföränderliga metalltrådar äro strömstyrkorna i de olika ledarna proportionella mot varandra, då strömstyrkorna i dem varieras.

Denna sista erfarenhetssats är ej nödvändig, men framhålles redan i början, emedan man genom den befrias från att föreskriva ett bestämt material i voltmetern. Att detta är en betydande vinst, framgår vid jämförelse med termometrien, där man nödgas definiera termometerfluidet för att ej få olika temperaturskalor. Angående satsen 3 måste starkt betonas, att den ej är sann, om strömmen i någon av grenarna går genom gas eller vissa mineral (detektorer vid trådlös telegrafi).

Spänning (potentialdifferens) definieras som orsaken till ström. Spänningen mellan ändpunkterna av en ledare är direkt proportionell mot den elektriska strömmens styrka i densamma.

En omedelbar konsekvens av denna definition är voltmetern.

Vid definitionen förutsättes, att ledaren är oförändrad vid olika strömstyrkor, således även att dess temperatur hålles konstant, såvida ej dess temperaturkoefficient är $= 0$. Av definitionen framgår, att spänningen mellan tvenne punkter av en ledare är konstant, om en lämplig galvanometer, som inkopplats mellan dessa punkter, gör konstant utslag.



Kopplas enligt vidstående schema, kan man hålla spänningen mellan punkterna *B* och *C* konstant och utan att ha något mätinstrument i grenen *BCD* hålla reda på strömstyrkan i denna gren vid försök med olika trådar i densamma. Man finner, att strömstyrkan i grenen *BDC* varierar med trådarnas längd, genomskärningsarea och ämnets beskaffenhet. Man ger ett uttryck för

detta fenomen genom att säga, att tråden gör motstånd mot strömmen och definierar ledningsmotståndet med följande sats:

Motståndet (R) i ledare är vid lika spänning mellan deras ändpunkter omvänt proportionell mot strömstyrkan i dem.

Man väljer en godtycklig tråd till enhet och kallar dess motstånd 1Ω (definierad på välkänt sätt) och jämför sedan genom experiment i enlighet med ovanstående kopplingsschema andra trådars motstånd med denna enhet och finner så experimentellt sanningen av formlerna:

$$R=\varrho\frac{l}{a} \text{ och } \varrho_t=\varrho_0\,(1+\alpha t).$$

Under dessa experiment hålles utslaget på galvanometern V konstant, d. v. s. man arbetar vid konstant spänning och kan tills vidare ta den till enhet i ett godtyckligt måttsystem.

Genom de under 3 härovan anförda experimenten finner man, att ledningsmotståndet i metalltrådar av konstant temperatur ej är funktion av spänningen mellan deras ändpunkter. Det på ovan angivet sätt definierade begreppet ledningsmotstånd är således något för tråden karaktäristiskt.

Vid den använda spänningen är enligt definitionen på motstånd strömstyrkan $\frac{k}{R}$ i en tråd med det oföränderliga motståndet R. Fördubblas strömstyrkan, sluter man enligt definitionen på spänning, att spänningen fördubblats; har strömstyrkan blivit V gånger större än i första fallet, måste spänningen blivit V gånger större, och som uttryck på strömstyrkan I får man i detta fall $I=\frac{kV}{R}$.

Väljes nu en sådan enhet för V, att $V=1$ då $I=1$ och $R=1$, får man som bekant definitionen på volt och

$$I=\frac{V}{R}.$$

Av ovanstående synes, att både motståndet R och spänningen V definierats genom formeln:

$$I = \frac{V}{R}.$$

Det är möjligt att definiera två storheter genom *en* ekvation, emedan man experimentellt kan skilja sådana orsaker till förändring av strömstyrkan, vilka ligga hos tråden själv, och hänföra dem till faktorn R, från andra, vilka hänföras till V.

Vid en jämförelse mellan den av lektor Meyer utvecklade framställningen av Ohms lag och den härovan givna tillåter jag mig kalla den förra den historiska och den senare den moderna, emedan denna direkt ansluter sig till de gällande internationella definitionerna på de elektriska enheterna.

Ur kunskapsteoretisk synpunkt torde båda vara oangripliga och således likvärdiga.

Ur didaktisk synpunkt åter är den moderna mycket överlägsen.

Den historiska metoden kräver bland annat:

1. Anskaffande av Coulombs vågar och av användbara elektrometrar åt våra läroanstalter, där ifrågavarande lära skall genomgås;

2. teoretiskt bevis för att elektricitetstransporten är proportionell mot potentialdifferensen;

3. bevis för att elektrometerns utslag anger det arbete, som åtgår till att föra enheten elektricitet från oändligheten till punkten i fråga;

4. teoretiskt bevis för att elektricitetstransporten är omvänt proportionell mot motståndet;

5. experimentellt bevis för att strömmens magnetiska kraft och kemiska verkan äro proportionella mot strömstyrkan i Ohms mening, d. v. s. mot elektricitetstransporten per sekund.

Skulle en dylik lärogång användas i våra skolor, skulle den taga mycket tid. T. o. m. om man inskränkte sig till

att göra experimenten »på tavlan» voro de tidsödande, om lärjungarna skulle få en så klar föreställning om dem, att de kunde redogöra för dem.

I stället för de experiment, som omnämnas under mom. 5, bleve man nog tvungen att säga: »Fechner har gjort dem, och då får ni lov att tro på hans resultat.»

Och om man lyckats planta in hela tankegången, måste man dock sedan gå igenom det mesta av det, som innehålles i den moderna framställningen, ty varje student måste känna de internationella definitionerna på de elektriska enheterna.

Jag har för c:a 20 år sedan vid Norra reallläroverket i Stockholm under några år försökt den historiska framställningen så pass grundligt som tid och resurser tillåto. Det var nog lätt att få eleverna att framsäga den elektrostatiska definitionen på potential, men jag tvivlar på, att en avsevärd procent av dem fattade, att den så definierade storheten var densamma som den, som mätes med volt inom elektrodynamiken, och lika litet torde flertalet fattat sambandet mellan elektricitetsmängd definierad elektrostatiskt och elektrodynamiskt (elektromagnetiskt).

Vid nämnda läroverk ansågo de flesta av fysiklärarna framställningen olämplig för skolan, och med lektor Moll i spetsen övergingo vi till den moderna framställningen.

Denna kräver inga teoretiskt svåra bevis, inga dogmer, inga experiment »på tavlan», då alla nödiga experiment lätt kunna utföras och de behövliga apparaterna under alla förhållanden måste finnas på ett fysikum; eleverna föras rakt in i den del av elektricitetsläran, som har den största praktiska betydelsen.

Elektrostatik läses emellertid alltfort i våra skolor, men ytterst få lärare torde nu försöka slå någon ordentlig brygga mellan de elektrostatiska och de elektrodynamiska fenomenen.[1] Den enda förmedlingen — förutom namnet —

[1] Om man grundar elektrostatiken på Faraday Maxwells föreställningar, är det lätt att få sammanhang mellan de elektrostatiska och elektrodynamiska fenomenen. Se t. ex. denna tidskr. årg. 1, sid. 159 o. följ.

torde vara, att lärjungarna få se ett elektroskop göra utslag dels för statisk, dels för elektrodynamisk elektricitet.

Vid akademisk undervisning ställer sig saken annorlunda. Där disponeras tillräckligt med tid, där har man lärjungar, som kunna hålla isär olika teorier för samma sak etc. Studenter, som ägna sig åt fysiken, måste ta kännedom ej blott om vår tids uppfattning om fenomen, utan även om de irrvägar, på vilka vetenskapen letat sig fram. Men i skolan gjorde vi fysiklärare klokt, om vi toge lärdom av lärarna i moderna språk: dessa meddela blott språkens nuvarande former och uttal och lämna språkhistoriens studium åt universiteten. Vi inse, huru förvirrande det skulle vara för nybörjare att få former och uttal på olika sätt. Även kemilärare kunna för oss stå som mönster i detta avseende: de äro angelägna att vara med sin tid så mycket som möjligt, deras läroböcker utbyta åskådningar, som anses föråldrade, mot de tidsenliga och upptaga senaste tiders forskningsresultat så långt ske kan.

Fysiska läroböcker omnämna visserligen en del nyare vetenskapliga och tekniska resultat, men de bibehålla i stor utsträckning gamla åskådningar och föråldrade metoder vid sidan av de tidsenliga och kunna därigenom ej få rum för viktiga kapitel ur den moderna fysiken. Förvisso skulle fysikundervisningen vinna på, om vi följde kemisternas föredöme.[1]

[1] Även de magnetiska fenomenen kunna behandlas efter den metod, som jag ovan refererat, och i min elementära elektricitetslära har jag angivit en dylik lärogång, vilken kompletterats genom en uppsats av d:r Blom i förra häftet av denna tidskrift.

Om elektricitetsström genom gaser och genom vakuum.

Av RAGNAR HOLM.

I en tidningsuppsats berättar fru Gurli Linder om ett samtal i en spårvagn mellan en ung arbetare och hans hustru. »Det är ändå underligt,» sade han, »att vagnen kan drivas fram på det här sättet.» — »Ä, det är ju elektriciteten, vet jag,» svarade hon. Historien belyser, hur elektrisk ström enkannerligen genom ledningstrådar är en vardaglig företeelse. Mindre vardaglig är för närvarande strömmen genom gaser. Den har emellertid också på sista tiden säkrat sin ställning inom tekniken, som en följande uppsats kommer att visa, och den förtjänar uppmärksammas även av lekmannen på området, dels för sin tekniska betydelse och dels emedan den i vetenskapligt hänseende är väl så instruktiv och till sin karaktär bekant som strömmen genom ledare.

Man anser, att strömmen i metaller framföres av tämligen fritt mellan atomerna rörliga elektroner, men graden av deras frihet samt deras antal äro tämligen obekanta. Strömmen genom gaser konstitueras i allmänhet också i huvudsak av elektroner. En alls icke joniserad gas, d. v. s. en gas utan joner och fria elektroner, är fullkomligt oledande liksom ett vakuum, om inga laddade partiklar slungas igenom detsamma[1]. Om de av strömmen genom en gas förda elektronerna själva genom joniserande stöt sörja för att ständigt nya elektroner frigöras i gasen för att övertaga

[1] Jag förutsätter som bekant, att tillräckligt hastiga elektroner och joner ha förmågan att slå loss elektroner ur molekyler, varvid av dessa bliva kvar s. k. positiva joner.

den fortsatta strömmen, kallar man strömmen självständig Om åter utom strömmen alstrade partiklar eller strålar måste till väsentlig grad underhålla den ionisering, som gör gasen ledande, kallar man strömmen osjälvständig.

Vi skola närmast beskriva ett par exempel på osjälvständig ström, speciellt uppehålla oss vid s. k. glödelektrisk ström genom vakuum. Sista delen av uppsatsen ägna vi åt den självständiga strömmen.

Osjälvständig ström mellan plattor. Vi tänka oss tvenne parallella plattor i ett med gas fyllt kärl. Den ena plattan, anoden, hålles på V volt högre potential än den andra, katoden. Mellan dem ioniseras gasen oavbrutet genom röntgenstrålar, som vi riktat dit. Allt efter som nu nya elektroner frigöras, sugas de av fältet emot anoden, dit de också anlända, om de ej på vägen bli förenade med positiva ioner. Samtidigt vandra ionerna emot, resp. till katoden. De till anoden anlända elektronerna gå in i anodmetallen. De bilda en ersättning åt metalledningen för de elektroner, som från katoden avlämnas till neutralisering av de ioner, som anlända till dess yta.. Hur strömmen av ioner föres genom batteriet är bekant från Arrhenius' dissociationsteori.

Vi nämnde ett strömmen försvårande fenomen, den s. k. *rekombinationen.* Härmed menas förening mellan positiva ioner och elektroner till neutrala molekyler. De bland de av röntgenstrålarna alstrade ionerna och elektronerna, som rekombinera, gå ju förlustiga för strömföringen. I den mån rekombinationen kan förhindras, kan man alltså öka strömmen, tills man når den strömstyrka, den s. k. *mättnadsströmmen*, då alla frigjorda elektroner och ioner föras till elektroderna (d. v. s. de antagna plattorna).

Vid rekombinationen uppfångas en elektron av det elektriska fältet kring en ion och drages till denna för att slutligen intimt förenas med den till en molekyl. Ett tillräckligt starkt yttre fält förmår intill ionernas närmsta närhet övervinna ionfälten och hindra dessa att uppfånga

elektronerna, med undantag av ett oväsentligt fåtal elektroner, vilka råka komma ytterst nära någon ion. Härav förstås, att man i allmänhet kan i det väsentliga förhindra rekombinationen och åstadkomma mättnadsström, genom att göra fältet mellan plattorna tillräckligt starkt, d. v. s. taga V tillräckligt stort.

Så snart elektronerna på sin väg mellan plattorna få tillräcklig hastighet och tillfälle att ionisera genom stöt, blir fenomenet naturligtvis mera komplicerat.

Glödelektrisk ström genom vakuum. Det fenomen, vi nu skola betrakta, har fått stor betydelse för de s. k. förstärkningsrören. I ett möjligast fullständigt evakuerat glaskärl är uppspänd en metalltråd (lämpligen av wolfram, som har en mycket högt liggande smältpunkt, omkring 3000°). Tråden kan uppvärmas till vitglödning av genom densamma ledd elektrisk ström. I närheten av tråden, eventuellt omgivande densamma, befinner sig ett metallbleck, anoden, som hålles på en potential V gentemot tråden. Man får, då tråden glödgas, en elektronström från tråden till anoden. Detta beror på, att en del av trådmetallens inre fria elektroner vid den höga temperaturen få tillräcklig hastighet att emot vissa, hindrande krafter arbeta sig ut ur tråden. Väl utkomna kunna de tagas om hand av det fält, som anoden alstrar och sugas till denna. Det antal elektroner, som per sekund förmår utträda ur tråden, stiger hastigt med dennas temperatur.

Det kunde nu tyckas, som om elektronströmmen alltid borde vara given, så snart trådtemperaturen är given. Den borde vara oberoende av anodfältet, som ju bara behöver se till att elektronerna, så snart de komma ut, dragas till anoden. Det är nämligen att märka, att anodfältet ej märkbart kan underlätta elektronernas utträde ur tråden, ty om det så kunde, så skulle det kunna draga ut elektroner även ur en kall tråd, vilket det icke kan. En undersökning visar emellertid, att endast om fältet överstiger en viss styrka, blir strömmen, som då kallas mättnadsström, lika med den elektronmängd, som per se-

kund av värmet utdrives ur glödtråden. Vid lägre V avtar strömmen samtidigt med V.

Detta egendomliga förhållande förklarades först 1914 i av varandra oberoende avhandlingar av Langmuir i U. S. A. och Schottky i Tyskland. De visade, tydligast Schottky, att det negativa moln eller som man säger, den negativa rumsladdning, som elektronerna på väg från glödtråden till anoden konstituera, var stark nog att, då icke mättnadsström förelåg, giva ett emot anodfältet riktat fält närmast glödtråden, som höll tillbaka och drev åter in i metallen en del av de utträdande elektronerna.

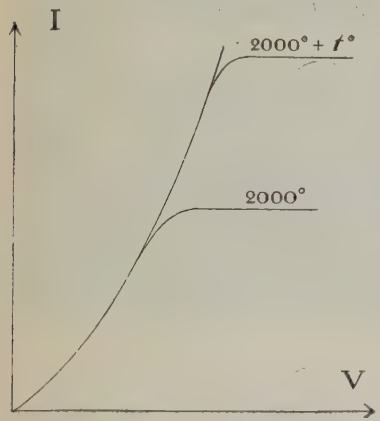


Fig. 1.

Fig. 1 demonstrerar vissa egenskaper hos den glödelektriska strömmen. I betecknar elektronströmmen till anoden, V betecknar anodens potential gentemot glödtråden. Kurvan visar, hur I stiger med växande V enligt en viss lag, som förblir giltig, tills mättnadsströmmen uppnås. Denna mättnadsström ligger högre, ju högre trådtemperaturen är (se fig. 1).

Glimström.

Vi övergå nu till den självständiga strömmen, vars typiska form är glimströmmen. Med hjälp av fig. 2 kan

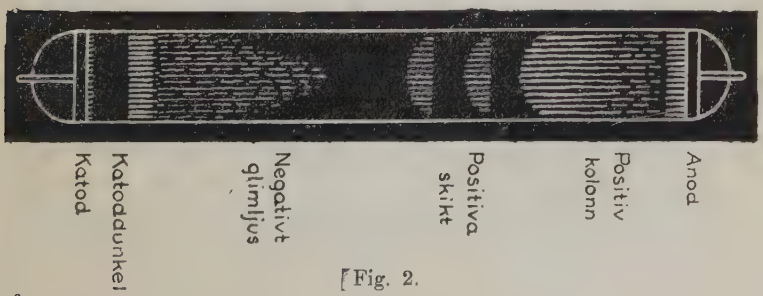


Fig. 2.

läsaren erinra sig benämningarna på glimströmmens för ögat markerade olika huvuddelar. Lysande områden äro angivna genom schatteringar.

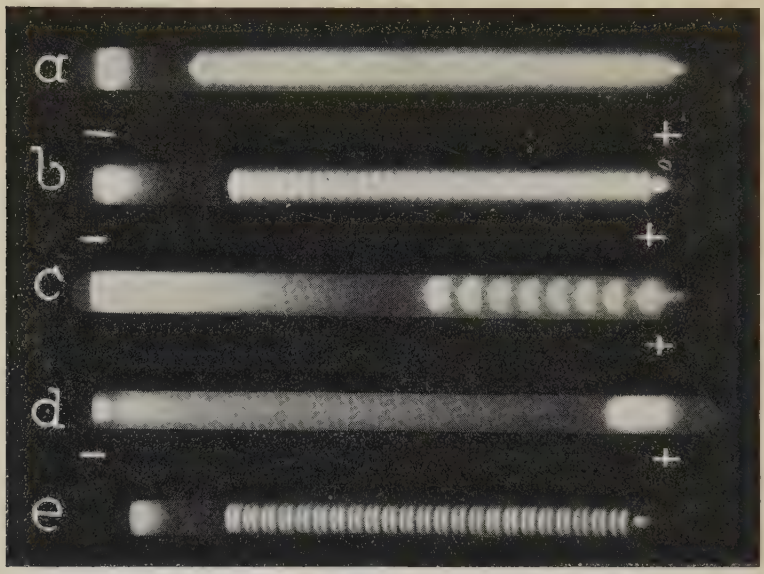


Fig. 3.

Fig. 3 visar fotografier av glimurladdningar genom svagt förorenad vätgas i ett 30 cm. långt, 2 cm. vitt rör.

3, a. Gastrycket är 3 mm kvicksilver; pos. kolonnen sammanhängande.

3, b. Gastrycket är 1 mm.; vackra positiva skikt. Katoddunklet är nätt och jämnt urskiljbart på fotografien. För ögat markeras det tydligare gentemot omgivningen, emedan dess huvudsakliga strålning är osynlig.

3, c. Gastrycket är 0,5 mm; stora skikt, katoddunklet rätt stort.

3, d. Gastrycket är 0,2 mm.; den positiva kolonnen finnes kvar blott vid själva anoden; katoddunklet är 2 cm. långt och inne i detsamma synes ljus, som utsändes från kanalstrålar på väg till katoden.

3, e. Här visar sig den positiva kolonnen uppdelad i s. k. skiktpar.

I det följande skall antydas, hur långt man kommit med förklaringen av de fenomen, som figurerna 2 och 3 demonstrera.

Glimströmmen bäres fram, liksom de förut beskrivna strömarterna, huvudsakligen av elektroner. Men till skillnad från de förra fallen utföra dessa elektroner uti strömvägen ionisationer, som motväga rekombinationen. Därmed må ej vara sagt, att nybildning och rekombination balansera varandra i varje enskilt skikt. Det sker blott i det stora hela. Somliga skikt knnna så att säga leva på överskottet av ioniseringen i ett föregående skikt.

De för strömmen nödvändiga elektronerna uppstå, som sagt, i allmänhet genom ioniserande stöt från elektroner. En viss elektronström måste alltså redan ur katodytan ingå i gasen. Denna första elektronström kan emellertid ej komma till stånd med mindre än att katoden kraftigt bombarderas av en partikelström. Som sådan komma endast de mot katoden rörliga positiva ionerna i fråga. På detta tvång, för att strömmen skall kunna underhållas, bero de redan genom sitt ljus karaktäristiska särfenomenen framför katoden.

Strax framför katoden uppstår ett starkt fält, vars totala potentialfall (räknat fram till början av det neg. glimljuset) kallas *katodfallet.* Tack vare detta får den mot katoden riktade ionströmmen en sådan fart, att den förmår slå loss elektroner (primära) ur katodmetallen. Dessa elektroner erhålla utav katodfallet än större hastighet än ionerna och därmed stor ioniseringsförmåga. De av dem befriade elektronerna kallas sekundära. En del av de sekundära elektronerna befrias inom katodfallområdet och få också rätt stora hastigheter.

Den nämnda mot katoden rusande ionströmmen bildar de s. k. *kanalstrålarna.* Som tydliga strålar dokumentera de sig särskilt, om de få tillfälle att genom hål i katoden komma bakom denna och där löpa i långa banor.

De s. k. *katodstrålarna* utgöras av de hastiga primära jämte de hastigaste sekundära elektronerna. De dokumentera sig tydligt som strålar, vilka begåvade med trögghet utslungats vinkelrätt mot katodytan. De ionisera starkt utefter sin bana. Varje sådan elektron ioniserar flere gånger. Detta gör, att inom större delen av det område de genomrusa — huvudsakligen det negativa glimljuset — behövs ingen ionisering från de därinom befriade sekundära elektronernas sida. Därför blir fältet svagt. Ett så starkt fält, att det bringar de nybildade sekundära elektronerna till ioniseringshastigheter, uppträder först i den positiva kolonnen. Denna är så att säga den mest typiska självständiga strömbanan, enär de inom densamma frigjorda elektronerna själva undan för undan sörja för den vidare ioniseringen. Hela det neg. glimljuset åter är så att säga ett särfenomen, beroende på att katodstrålarna utföra överloppsgärningar och starkt ionisera ett större område än som vore nödvändigt för elektronbehovet framför katoden.

Emedan ljuseffekten framkallas av olika hastiga elektroner i det negativa glimljuset och i den positiva kolonnen, få dessa områden olika färg. I luft och kväve t. ex. är det förra gredelint och den senare brandröd.

Den positiva kolonnen är ofta skiktad, beroende på, att ioniseringen inom densamma sker så att säga i ansatser, som naturligtvis motsvaras av vågformigt varierande fältstyrka.

En mängd egenheter hos glimströmmen, t. ex. katodfallets beroende av strömstyrkan, sambandet mellan fältstyrka, strömstyrka och rörvidd i den positiva kolonnen samt uppkomsten av olika storlekar och former hos den positiva kolonnens skikt, ha på enkelt sätt förklarats av förf. Förklaringen grundar sig på vederbörlig hänsyn till betingelserna för att strömmen skall underhålla sig själv samt underhålla vissa rumsladdningar. Dessa senare behövas för att på lämpligt sätt forma de elektriska fält, som framdriva strömmen. Det är nämligen att märka, att

de strömmen drivande fälten, när strömmen väl kommit riktigt i gång, till försvinnande grad bero av katodens och anodens laddningar, däremot väsentligt äro betingade av rumsladdningar, som bildas av strömmande positiva och negativa ioner.

Vissa fenomen kunde förf. förklara endast genom att införa följande hypotes. Rekombinationen mellan elektroner och ioner föregås nästan alltid av att elektronen i fråga bromsas av och »klibbar» fast vid en neutral molekyl, innan han infångas av fältet kring en av de gentemot molekylerna enormt tunnsådda ionerna och drages in till denna.

Molekylernas förmåga att uppfånga elektroner genom någon slags »klibbighet» spelar en stor roll vid skiktbildningen i den positiva kolonnen. En nödvändig betingelse för skikten är ju, att negativa rumsladdningar bildas mellan positiva sådana. De förra kunna ej underhållas av de snabba fria elektronerna men väl av de tröga negativa ionerna, d. v. s. molekyler med vid dem klibbande elektroner. I ädelgaser äro molekylerna ej klibbiga. Därför uppträda inga skikt i rena ädelgaser, ej ens i rent kväve.

En stötesten för glimströmsteorien är katoddunklet, särskilt dess skarpa gräns gentemot det negativa glimljuset. Försök av förf. synas ge vid handen, att dunklet kommer till stånd, i det vissa spektra utsläckas av det starka fältet framför katoden. Detta är troligen icke så att förstå, att vederbörande fält i allmänhet skulle kunna angripa själva strålningsproceduren. Därtill torde det i allmänhet vara för svagt. Men det kan förhindra den före rekombinationen nödvändiga bromsningen av elektronerna genom klibbningen och därmed i det väsentliga förhindra rekombinationen själv och den för denna karaktäristiska ljusemissionen.

Till sist må framhållas, att glimströmmen naturligtvis ej kan tändas genom en fullkomligt oioniserad gas. Vi ha emellertid alltid att göra med något ioniserade gaser.

Ionisationen i dem åstadkommes av överallt i atmosfären uppträdande radioaktivstrålar.

En del annorlunda benämnda fenomen äro att betrakta som avarter av glimströmmen. Så uppstår *ljusbågen*, om strömtätheten och även hela strömstyrkan är stor nog att hålla katoden vitglödande. Denna avger nämligen då de nödiga elektronerna så lätt, att blott ett minimalt katodfall behövs, varigenom ljusbågen får sin särkaraktär.

S. k. *spetsström* är en ensidig från en spets utgående glimström, som t. ex. blott äger de negativa delarna, men ingen positiv kolonn. Denna senare behövs ej, emedan strömmen grenar ut sig så, att den längst ut kan föras vidare utan stötionisering, buren endast av de alltid förefintliga luftionerna. Där detta sker, visar sig intet ljusfenomen. Man ser alltså blott närmast spetsen ett ljusfenomen. Det plägar se ut som en liten ljuskvast, varför strömarten i fråga också benämnes kvastström.

Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur.

Av GUSTAV ALMKVIST.

(Forts. från årg. 2, h. 2.)

III.

Starks teori.

Den teori, som mest överensstämmer med Kauffmanns, är den, som samma år (1908) uppställdes av J. Stark.[1] Liksom Kauffmann ansluter sig även Stark till de två principerna om de gamla valensenheternas delbarhet och om den kemiska kraftens verkan även mellan atomer, som ej äro i omedelbar beröring med varandra. Men han har en mera utpräglad elektrokemisk uppfattning av affiniteten än vad Kauffmann har. Lika bestämt som Werner opponerar sig mot, att den kemiska affiniteten är av elektrisk natur, lika avgjort uttalar sig Stark för denna åsikt. De skäl, varpå han grundar sin åsikt, äro i korthet följande:

Redan det faktum, att atomerna kunna absorbera och utsända ljusstrålar, visar närvaron av elektromagnetiska fält hos atomerna, eftersom ljuset är en elektromagnetisk vågrörelse. Följaktligen måste det även finnas elektriska laddningar hos atomerna. Angående dessa laddningars natur och läge kunna vi draga en del slutsatser ur några av de nyare fysikaliska upptäckterna. Så visar den s. k. Zeemaneffekten, vilken som bekant består uti en uppdelning av spektrallinjerna genom starka elektromagnetiska fält, att spektrallinjerna alstras av negativt laddade partiklar, som hava samma laddning och massa som elektronerna i de långsamma katodstrålarna. Dessa elektroner måste äga en bestämd anordning och bindning i atomerna och kunna

[1] Jahrbuch d. Radioakt. und Elektron. 5; 124. Principien der Atomdynamik. Leipzig 1915.

därför betraktas som en del av dessa. Som atomerna i regeln äro elektriskt neutrala, måste det även förekomma positiva laddningar hos desamma, och härigenom kan förekomsten av positiva och negativa poler hos atomerna anses bevisad. De positiva polerna föreställer sig Stark som delar av atomens yta, vilka äro stora i jämförelse med elektronerna. Dessa senare hava på ett visst avstånd från de positiva polerna ett jämviktsläge, som de sträva att återtaga, om de rubbas därur genom någon yttre kraft. För att detta skall vara möjligt måste naturligtvis resultanten av de på elektronen verkande krafterna vara $= 0$ i jämviktsläget och ökas med avståndet därifrån till ett visst maximum samt därpå åter avtaga, eftersom elektronerna dock faktiskt kunna avskiljas från atomerna. För att förklara detta kan man enligt Stark antingen tänka sig existensen av en repulsiv kraft, som motverkar attraktionen mellan elektronerna och de positiva polerna, och som varierar på annat sätt än attraktionen, när avståndet förändras, eller också kan man antaga, att de kraftlinjer, som gå emellan de positiva och negativa polerna, förlöpa så att elektronerna därigenom hållas i ett visst jämviktsläge. Dessa kraftlinjers förlopp beror nämligen icke blott på varje särskild elektron och dess mostvarande positiva pol, utan på samtliga positiva och negativa poler på atomen samt dessutom på atomens inre byggnad. En förskjutning av en enda elektron åstadkommer därför en förändring av hela atomens elektriska tillstånd, vilken förändring motverkar förskjutningen av elektronen och strävar att återföra den till jämviktsläget. Vilkendera av dessa förklaringar som är den riktiga, anser Stark omöjligt att för närvarande avgöra, då därtill fordras kännedom om atomernas inre byggnad, ett problem, som enligt Stark vetenskapen ej för närvarande är i stånd att lösa trots det myckna arbete, som en hel del forskare nedlagt därpå. Stark inskränker sig därför till att uppställa den hypotesen, att elektronerna äga ett dylikt jämviktsläge, och överlåter dess bekräftelse åt framtiden.

I fråga om atomernas förening till molekyler anser Stark i likhet med Kauffmann, att detta sker därigenom, att elektronerna sända ut kraftlinjer till två eller flera atomer. Antagandet av en särskild kemisk kraft anser därför Stark icke blott obehövligt, utan även högst osannolikt, ty då skulle man få två olika slag av bindningar mellan atomerna, en elektrisk och en kemisk, en slutsats, som enligt Stark strider mot erfarenheten. Nu anse emellertid en hel del kemister, att starka skäl verkligen tala för antagandet av två olika slags bindningar, nämligen de, som Werner kallat den ionogena och den icke-ionogena bindningen, och Nernst har, som jag förut påpekat (I, sid. 10), med skärpa framhållit den genomgripande skillnaden mellan de två bindningssättens inverkan på föreningens egenskaper. Som något bevis för den kemiska kraftens elektriska natur kan därför Starks resonemang icke betraktas. Den av Kauffmann påpekade svårigheten att förklara, varför attraktionen mellan elektronerna och de positiva polerna kan vara olika, även om deras laddning är densamma, försöker Stark att undgå genom att framhålla, att atomernas elektriska kraftfält kunna variera på mångfaldigt sätt, beroende på såväl antalet av elektroner och positiva poler som deras ömsesidiga läge. Ju mer två atomers kraftfält i form och utsträckning passa ihop, desto lättare kunna de sammansmälta till ett kraftfält och desto starkare är den kemiska kraften mellan dessa atomer Häruti ser Stark orsaken till den kemiska kraftens selektiva natur, vilken Werner, som ovan (I, sid. 3) nämnts, anser oförenlig med hypotesen om dess elektriska ursprung. Så länge man emellertid icke kan visa, att atomernas elektriska kraftfält verkligen kunna variera så, att deras variationer överensstämma med affinitetens växlingar, så kan dock icke Starks förklaring anses fullt tillfredsställande. Han gör visserligen ett försök att åskådliggöra dessa kraftfälts olika beskaffenhet och indelar för detta ändamål atomerna i tre huvudgrupper: elektropositiva, elektronegativa

och elektroindifferenta[1]. De elektropositiva utmärka sig därigenom, att deras elektroner befinna sig på ett avstånd från atomkärnan, som är lika stort eller större än dennas diameter. De äro jämförelsevis löst bundna och hava icke ett punktformigt jämviktsläge, utan äro fritt rörliga utefter en »viloyta». Hos de elektronegativa elementen äro däremot elektronerna starkt bundna och hava ett punktformigt jämviktsläge på ett avstånd från atomkärnan, som är litet i förhållande till dennas diameter. De elektroindifferenta atomerna bilda ett mellanled mellan de två andra slagen, i det att deras elektroner hava ett punktformigt jämviktsläge, men äro vida svagare bundna än hos de elektronegativa atomerna. Härav följer också, att de elektronegativa atomerna ha en benägenhet att binda främmande elektroner och därigenom bli negativt laddade, under det att de elektropositiva lätt förlora en eller flera av sina elektroner, så att de erhålla en positiv laddning. På grund av kraftfältens beskaffenhet försöker nu Stark beräkna bindningens olika styrka för de kombinationer, som kunna göras av de tre huvudtyperna. Den starkaste bindningen finner han vara den mellan två elektroindifferenta ämnen, såsom två kolatomer eller en kolatom och en väteatom. Jämförelsevis stark är även bindningen mellan en elektropositiv och en elektronegativ atom, men på grund av den ringa attraktionen mellan elektronerna och de elektropositiva atomernas kärnor har den benägenhet att brista på detta ställe. Sker detta, så komma elektronerna att endast vara bundna vid den elektronegativa atomen, som därigenom blir negativt laddad, under det att den elektropositiva antager en positiv laddning. Detta är enligt Stark orsaken till den elektrolytiska dissociationen. Jämförelsevis svag är bindningen mellan två elektronegativa atomer, emedan dessa hålla sina egna elektroner så fast bundna, att dessa endast med svårighet kunna sända några kraftlinjer över till den andra atomen. Om en dylik molekyl

[1] För den sista gruppen använder Stark benämningen »elektrozwiefach», vilken dock icke torde kunna ordagrant återges på svenska.

skulle dissocieras, så skulle alltså varje atom behålla sina ursprungliga elektroner, och någon ionisering skulle icke uppstå. Svagast skulle bindningen vara mellan två elektropositiva atomer, varför också dessa ämnens molekyler ofta äro enatomiga. Som synes stämma dessa resultat någorlunda med erfarenheten, ehuru många avvikelser likväl förekomma. Så t. ex. skulle ju bindningen mellan två kolatomer vara starkare än mellan en kolatom och en syreatom, vilket den ju dock icke kan vara, enär den spränges genom oxidation.

I avseende på dubbelbindningens ävensom de komplexa och molekylära föreningarnas natur överensstämmer Starks teori i huvudsak med Kauffmanns, varför jag kan hänvisa till denna. Dock uppfattar han t. ex. salmiakens konstitution i likhet med Werner (I, sid. 8) och icke i likhet med Kauffmann. (II, sid. 11).

Ett sätt att experimentellt bestämma bindningarnas styrka anser sig Stark ha funnit i undersökningen av de kemiska föreningarnas och elementens spektra. Dessa uppkomma nämligen enligt Stark genom atomernas eller elektronernas svängningar, och ju starkare bindningen är, desto större är den kraft, som driver dem tillbaka till deras jämviktsläge och desto större blir därför deras svängningstal. För detta tal gäller formeln $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, där k är den kraft, varmed atomen eller elektronen är bunden vid sitt jämviktsläge, och m hans massa. Som man ser av formeln, är n större, ju mindre m är, och därför är det betydligt större för elektronerna än för atomerna. De förras spektrallinjer ligga därför nästan alltid i den violetta och ultravioletta delen av spektrum, de senares i den röda och framför allt i den ultraröda delen. Genom undersökning av ett stort antal kolvätens spektra har också Stark konstaterat, att de olika slagen av kolbindning — enkelbindning, dubbelbindning, tredubbelbindning och benzolbindning — hava var sitt karaktäristiska spektrum. Dock föreligger, såsom Stark framhåller, ännu icke tillräckligt observationsmaterial på detta område för att med säkerhet kunna pröva teoriens riktighet.

Ramsays teori.

Samma år, som Stark och Kauffmann uppställde sina affinitetsteorier (1908), framkom även nobelpristagaren sir William Ramsay med ett utkast till en affinitetsteori[1] Även han söker att förklara affiniteten på elektrisk väg, men under det att Stark och Kauffmann anse, att elektronerna alltefter beskaffenheten av de atomer, som de sammanbinda, befinna sig på mycket olika avstånd från dessa och så att säga icke tillhöra någon viss av de förbundna atomerna, anser Ramsay, att elektronerna alltid införlivas med den ena av två sammanbundna atomer nämligen den mest negativa. Atomerna bliva därigenom elektriskt laddade, och attraktionen mellan dessa motsatta elektriska laddningar åstadkommer föreningen dem emellan. Något försök att på denna hypotes grunda en mera ingående förklaring av affinitetens olika yttringar har emellertid Ramsay icke gjort, och det torde nog också stöta på mycket stora svårigheter. Så t. ex. skulle en enkelbindning åstadkommas genom övergång av en elektron, en dubbelbindning av två elektroner och en tredubbelbindning av tre elektroner, vilket emellertid icke innebär någon förklaring av de senare bindningarnas säregna natur. Vidare skulle vid bindning mellan två lika atomer, t. ex. två kolatomer, elektronerna än kunna överföras till den ena och än till den andra atomen, vilket skulle ge upphov till två isomera föreningar. Denna fråga har Falk och Nelson[2] ägnat en rätt grundlig undersökning och kommit till det resultat, att dylika isomerer verkligen i vissa fall kunna påvisas. I allmänhet skulle emellertid antingen endast den ena av de två isomererna vara stabil, eller också skulle de vara tautomera former, som så hastigt skulle övergå i varann, att de icke kunna skiljas åt, en förklaring, som dock förefaller rätt godtycklig.

[1] Journal of chemical Society 93; 775.
[2] Journal für praktische Chemie 88; 97 (1913)

Bohrs och Thomsons teorier.

På de sista åren hava tre nya affinitetsteorier uppställts nämligen Bohrs 1913, Thomsons 1914 och Kossels 1916. Dessa skilja sig från de föregående däruti, att de även försöka att utreda frågan om atomernas inre byggnad, vilket de äldre affinitetsteorierna icke inlåto sig på. Det första försöket i denna riktning är emellertid något äldre, i det att nobelpristagaren J. J. Thomson 1904 uppställde den första teorien om atomernas struktur.[1] Enligt denna skulle atomerna bestå av negativa elektroner, som befinna sig inuti en positivt laddad sfär, vars laddning skulle vara likformigt fördelad över hela dess volym. Den attraktion, som den positiva elektriciteten utövar på elektronerna, motväges av dessas ömsesidiga repulsion, vilken strävar att avlägsna dem från varann och följaktligen även från atomens medelpunkt. Genom vidlyftiga matematiska beräkningar undersöker Thomson villkoren för systemets stabilitet och kommer till det resultatet, att elektronerna måste ordna sig i cirkelformiga ringar, som antingen ligga i samma eller i parallella plan. Dessa elektronringar, vilkas medelpunkter antingen sammanfalla eller ligga på en mot deras plan vinkelrät axel, äro stabila för förskjutningar i ringarnas plan, men för att de skola vara stabila även för förskjutningar vinkelrätt mot detta plan, fordras dessutom, att elektronerna skola rotera kring atomens medelpunkt med en viss minimihastighet.

Thomson söker nu att visa, att atomer, som äro konstruerade på ovan angivna sätt, skulle ha en del egenskaper, som vore periodiska funktioner av antalet elektroner. Detta antal måste därför uppenbarligen stå i nära samband med atomvikten, och på olika grunder, som det här skulle bli för vidlyftigt att ingå på, beräknar Thomson elektronernas antal approximativt till halva atomvikten. Periodiciteten i Mendelejevs system skulle därför enligt

[1] Phil. Mag. (6) 7; 237.

Thomson bero på variationer i elektronernas antal. Varje element skulle ha en elektron mer än det närmast föregående. Alla element i samma horisontalserie skulle ha samma antal elektroner i den yttersta ringen, men skilja sig i avseende på antalet i de inre ringarna. Alla element i samma grupp skulle åter ha samma antal elektroner i de inre ringarna, men skilja sig genom antalet elektroner i den yttersta ringen. Dessa system av elektroner ha olika stabilitet och följaktligen olika benägenhet att förlora elektroner eller upptaga dylika utifrån. De mest stabila systemen äro ädelgaserna, och härpå beror också deras kemiska indifferens. De övriga elementen ha benägenhet att övergå till system med samma antal elektroner som ädelgaserna. Detta sker hos de elektropositiva ämnena därigenom, att dessa förlora en eller flera av sina yttre elektroner, varigenom de erhålla en positiv laddning, och hos de elektronegativa därigenom, att de upptaga en eller flera elektroner från andra atomer och sålunda bliva negativt laddade. Den första gruppens element behöva alltså förlora en elektron för att få samma antal som ädelgaserna i samma horisontalserier, och äro fördenskull envärdiga, den andra gruppens behöva förlora två, och äro därför tvåvärdiga o. s. v. Den sjunde gruppens element åter få genom att upptaga en elektron samma antal som de närmast efterföljande ädelgaserna, och äro därför envärdigt negativa, den sjätte gruppens upptaga av samma orsak två elektroner, och äro därför tvåvärdigt negativa o. s. v. Thomson visar därjämte, att stabiliteten hos den yttersta elektronringen för element i samma horisontalserie successivt ökas, när, antalet elektroner innanför ringen ökas, och att följaktligen benägenheten att förlora elektroner successivt minskas från den första till den sjunde gruppen. Vid övergången från ädelgaserna till den första gruppen sker åter en plötslig förändring av stabiliteten, i det att denna från sitt maximum sjunker till sitt minimum.

Mot denna intressanta tolkning av det periodiska systemet har emellertid riktats synnerligen allvarliga anmärk-

ningar dels från kemisk synpunkt av Arrhenius, dels från fysikalisk av Rutherford. Så har Arrhenius bland annat anmärkt, att om varje elements atomer skilja sig från det näst föregående elementets med en elektron och en positiv laddning, så borde skillnaden mellan deras atomvikter vara approximativt densamma i hela systemet, vilket alldeles icke är fallet. Rutherford åter har påvisat, att α-strålarnas spridning vid deras gång genom materien icke kan förklaras, om man icke antager, att atomernas positiva laddning är koncentrerad i dess medelpunkt till en kärna av mycket små dimensioner, t. o. m. mindre än elektronernas. På grund härav har Rutherford modifierat Thomsons atommodell, så att han antar, att den positiva atomkärnan åtminstone hos H och He har en diameter, som är mindre än 10^{-13} cm., under det att elektronernas är av denna storleksordning och atomernas av storleksordningen 10^{-8} cm. Detta hindrar icke, att atomkärnans massa är mycket större än elektronernas, ty massan behöver icke stå i något samband med volymen. Dessutom skiljer sig Rutherford från Thomson även i det avseendet, att han anser, att ett ämnes kemiska och dess flesta fysikaliska egenskaper huvudsakligen bero på elektronerna i den yttersta ringen, under det att de radioaktiva fenomenen ävensom röntgenstrålningen bero på atomernas inre byggnad. Vidare ansluter han sig till en hypotes, som uppställts av van den Broek, att elektronernas antal i atomen och följaktligen även kärnans positiva laddning är lika med elementens ordningsnummer i det periodiska systemet. I enlighet härmed beror elementens gruppering egentligen på atomkärnans positiva laddning och icke på atomvikten, men som kärnans massa får antagas växa med dess laddning, så överensstämmer denna gruppering av elementen i huvudsak med deras gruppering efter atomvikter. Avvikelser förekomma i fråga om A och K, Ni och Co samt Te och J. För dessa element är ordningen efter kärnladdning den motsatta mot ordningen efter atomvikter, så att A kommer före K, Co före Ni och Te före J,

vilken ordningsföljd som bekant iakttages i det periodiska systemet, ehuru den strider mot storleken av deras atomvikter. Genom den engelske forskaren Moseleys genialiska undersökningar över den karaktäristiska röntgenstrålningen och den av honom uppställda formeln för dennas frekvens $\nu = a\,(N-b)^2$, där ν betecknar frekvensen, N kärnladdningen samt a och b konstanter, har man funnit ett sätt att bestämma kärnladdningen. Därigenom har man kunnat gruppera även sådana element, vilkas atomvikter äro osäkra såsom en del av de sällsynta jordmetallerna och de radioaktiva ämnena, så att för närvarande endast 5 platser i det periodiska systemet äro tomma.

Emellertid har den danske forskaren N. Bohr framhållit,[1] att Rutherfords atommodell icke skulle vara stabil, enär elektronerna, vilka icke såsom i Thomsons teori skulle befinna sig inuti en positivt laddad sfär, enligt den vanliga strålningsteorien skulle förlora energi genom utstrålning. Bohr anser emellertid, att den gamla strålningsteorien är oriktig, och har i stället uppställt en ny, enligt vilken elektronerna i sina normala banor ej skulle utstråla någon energi, utan endast därigenom, att de plötsligt skulle kunna övergå från en bana till en annan, vid vilken övergång de skulle utsända energi i bestämda energikvanta enligt Plancks kvantteori. Bohrs teori har fått ett starkt stöd därigenom, att han på teoretisk väg beräknat frekvensen för vätets spektrallinjer och funnit en synnerligen god överensstämmelse mellan de beräknade och observerade värdena. Med antagande av denna strålningsteori skulle sålunda Rutherfords atommodell vara stabil, och Bohr har också upptagit densamma i sin affinitetsteori. Likaledes anser han i överensstämmelse med Rutherford, att ett elements kemiska egenskaper huvudsakligen bero på elektronerna i den yttersta elektronringen, och han sätter deras antal för de 4 första grupperna i det periodiska systemet lika med elementens värdighet gentemot syre och för den femte t. o. m. sjunde gruppen lika

[1] Phil. Mag. (6) 26; 1.

med deras värdighet gent emot väte. Han får då följande anordning av elektronerna hos de 24 första elementen, varvid den första siffran betecknar antalet elektroner i den innersta ringen och de övriga antalet i de därpå följande ringarna.

H (1)

He (2)	Li (2, 1)	Be (2, 2)	B (2, 3)
Ne (8, 2)	Na (8, 2, 1)	Mg (8, 2, 2)	Al (8, 2, 3)
A (8, 8, 2)	K (8, 8, 2, 1)	Ca (8, 8, 2, 2)	Sc (8, 8, 2, 3)
C (2, 4)	N (4, 3)	O (4, 2, 2)	Fl (4, 4, 1)
Si (8, 2, 4)	P (8, 4, 3)	S (8, 4, 2, 2)	Cl (8, 4, 4, 1)
Ti (8, 8, 2, 4)	V (8, 8, 4, 3)	Cr (8, 8, 4, 2, 2)	

Som man ser hava element, som tillhöra samma grupp, samma antal elektroner i den yttersta ringen. Skillnaden mellan totala antalet elektroner hos två närstående ämnen inom samma grupp är åter lika med 8, som även skulle vara det största antal, som skulle kunna förekomma i någon ring hos dessa element. För de större periodernas kulle denna skillnad däremot vara 18, vilka elektroner skulle vara fördelade på 2 ringar i parallella plan med 9 i var.

För de 4 första elementen har Bohr även beräknat det arbete, som uträttas, när en elektron bindes vid atomkärnan, och får därigenom ett mått på atomens förmåga att upptaga elektriska laddningar. Detta arbete minskas ju fler elektroner, som bindas vid kärnan, och blir till sist negativt, då gränsen för det antal elektroner, som kan bindas vid kärnan, är uppnådd. I övrigt har han emellertid, såvitt jag vet, icke gjort några beräkningar över sina elektronsystems stabilitet, utan de flesta äro fullständigt hypotetiska.

I fråga om atomernas förening till molekyler anser Bohr, att detta tillgår så, att atomernas yttersta elektronringar sammansluta sig till en, vars plan skär sammanbindningslinjen mellan atomkärnorna mitt itu och är vinkelrätt däremot. De övriga elektronringarna bibehålla sina lägen oförändrade i de båda atomerna, men eftersom dessa förlorat en eller flera elektroner, hava de erhållit

positiv laddning. Dessa positiva laddningar attraheras av den gemensamma elektronringen, men repellera varandra själva. På ett visst avstånd mellan kärnorna hålla dessa båda krafter varann i jämvikt, och skulle atomerna avlägsnas därifrån, så skulle de sträva att återgå till detta läge, såsom Bohr matematiskt bevisar. Vidare beräknar han energiutvecklingen vid bildningen av några dylika system och finner t. ex., att denna är positiv för en vätemolekyl, men negativ för en molekyl av två heliumatomer. Härigenom erhålles ju en enkel förklaring, varför den förra molekylen består av två och den senare av en atom. En HCl-molekyl skulle bestå av en positiv H-kärna och en dylik rest av Cl-atomen jämte en ring av två elektroner mellan dem. Vid dissociation av en sådan molekyl skulle man enligt Bohr erhålla neutrala H- och Cl-atomer, vilket ju dock icke sker vid den elektrolytiska dissociationen. En H_2O-molekyl skulle bestå av en positiv rest av O-atomen och två dylika H-kärnor på lika avstånd från den förra samt två ringar med 3 elektroner i vardera mitt emellan kärnorna. Vid dissociation av denna molekyl skulle man erhålla två positiva väteatomer och en negativ syreatom med två elektriska laddningar, vilket dock varken sker vid den termiska eller den elektrolytiska dissociationen, utan endast vid elektriska urladdningar i Geislers rör. Man ser sålunda, att Bohrs beräkningar icke alltid överensstämma med erfarenheten.

*

På grund av de anmärkningar, som framställts mot Thomsons 1904 uppställda teori för atomernas struktur, har han senare (1913) utarbetat en annan teori härför[1], i vilken han i likhet med Stark antager, att elektronerna vanligen icke befinna sig i rörelse kring den positiva kärnan, utan i stället intaga vissa jämviktslägen. Men under det att Stark, så vitt jag vet, icke närmare undersöker, huruvida

[1] Phil. Mag. (6) 26; 792.

detta är möjligt eller ej, uppställer Thomson en ny hypotes för förklaringen härav. Enligt denna skulle atomkärnan på elektronerna utöva icke blott en attraktion, som är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet, utan även en repulsion som är omvänt proportionell mot kuben på avståndet. Härav följer, att på mycket små avstånd repulsionen överväger attraktionen, under det att det på stora avstånd är tvärtom. På ett visst avstånd hålla då de båda krafterna varandra i jämvikt. Thomson antar vidare, att repulsionen verkar lika i alla riktningar, under det att attraktionens verkningar äro inskränkta till vissa från atomkärnan utgående kraftrör, inuti vilka elektronerna befinna sig. Detta behöver icke strida emot, att den elektriska attraktionen från ett stort antal elektriskt laddade atomer verkar lika i alla riktningar, ty i en sådan samling kunna atomerna naturligtvis intaga alla möjliga ställningar.

På grund av denna atommodell har Thomson följande år (1914) uppställt en ny affinitetsteori[1].

Av hans atommodell följer, att atomerna i sin omgivning framkalla ett elektriskt kraftfält, även om de innehålla lika mycket positiv som negativ elektricitet. Detta kraftfält kan inverka på ett dylikt kraftfält i en annan atom, så att de båda atomerna attrahera varann, ehuru båda äro elektriskt neutrala. Man kan t. ex. tänka sig saken så som nedanstående figur utvisar, i vilken man antager två motsatta poler på varje atom

De båda atomerna sträva att inställa sig så, som figuren utvisar, och den positiva polen på den ena atomen kommer därför närmare den negativa än den positiva polen på den andra atomen. Följden härav blir, att attraktionen mellan de oliknämniga polerna blir starkare än re-

[1] Phil. Mag. (6) 27; 757.

pulsionen mellan de liknämniga, och att atomerna alltså attrahera varann. Attraktionen mellan atomerna kan därför vara av elektrisk natur, fastän atomerna äro elektriskt neutrala. Thomson ansluter sig i detta avseende till en förut av Sutherland uttalad åsikt, att atomerna äga såväl en positv som en negativ pol, och att det elektriska momentet, d. v. s. produkten av laddningen och avståndet mellan polerna, är karaktäristiskt för atomen både i fritt tillstånd och i föreningar av samma typ. Sutherland har emellertid, såvitt jag vet, icke tillämpat sin teori annat än på rent fysikaliska företeelser såsom t. ex. ytspänningen, men Thomson använder nu denna princip även för kemiska reaktioner.

Thomson framhåller nu till att börja med, att det elektriska kraftfält, som utgår från en molekyl, är resultanten av dem, som utgå från de fria atomerna, endast om dessa vid sin förening förbli elektriskt neutrala. Skulle de däremot bli elektriskt laddade, därigenom att en eller flere elektroner övergå från den ena atomen till den andra, tillkommer ett nytt elektriskt kraftfält, vars poler befinna sig på de motsatt laddade atomerna, och vars styrka beror på dess elektriska moment. Denna process kallar Thomson intramolekylär ionisation, och han indelar de kemiska föreningarna i två huvudklasser: ioniserade och icke-ioniserade. Detta innebär detsamma, som den av Werner framhållna skillnaden mellan den ionogena och den icke-ionogena bindningen, men under det att Werner betraktar denna skillnad som ett bevis för, att den icke-ionogena bindningen icke är av elektrisk natur, anser Thomson, såsom jag nyss visat, att båda äro av elektrisk natur, ehuru en väsentlig skillnad existerar emellan dem. Denna skillnad visar sig såväl i fysikaliskt som kemiskt avseende.

I fysikaliskt avseende utmärka sig de ioniserade molekylerna genom särskilt starka molekylarkrafter, såsom stort inre tryck, stor ytspänning o. s. v. samt framför allt genom hög dielektricitetskonstant. Dessa ämnen skulle därför utgöra undantag från Maxwells lag, att dielektri-

citetskonstanten är lika med kvadraten på brytningsindex, i det att den förra skulle vara större än den senare. Thomson härleder en formel för dielektricitetskonstanten, som lyder $K = a + \frac{0{,}88M^2 \cdot 10^{36}}{T} -$, i vilken M betecknar molekylernas elektriska moment och a en konstant. Denna formel stämmer synnerligen väl med av Bädecker utförda mätningar av dielektricitetskonstanten vid olika temperaturer. För icke-ioniserade molekyler skulle M vara $= 0$ och alltså $K = a$. Enligt Thomsons ovannämda antagande skulle därför a vara = kvadraten på brytningsindex, och man har således i denna formel ett medel att beräkna molekylernas elektriska moment ur dielektricitetskonstanten. Det har på detta sätt visat sig, att elementens molekyler vanligen icke äro ioniserade, under det att H_2O, H_3N, SO_2, HCl, CH_3OH, C_2H_5OH m. fl. äro ioniserade.

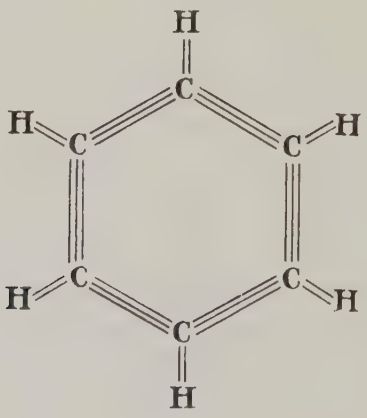
I kemiskt avseende visar sig den intramolekylära ionisationen huvudsakligen däruti, att den i vissa lösningsmedel övergår till elektrolytisk dissociation, särskilt i sådana med hög dielektricitetskonstant. Detta förklarar Thomson så, att det av den ioniserade molekylen framkallade elektriska fältet attraherar lösningsmedlets molekyler, vilka tränga sig emellan den ioniserade molekylens atomer och på grund av sin höga dielektricitetskonstant minska attraktionen emellan dem. Härmed torde en tillfredsställande förklaring på uppkomsten av den elektrolytiska dissociationen vara given, vilken fråga vid den elektrolytiska dissociationsteoriens uppställande lämnades öppen.

Det elektriska momentet hos en ioniserad molekyl kan vara så stort, att det arbete, som erfordras för att skilja två sådana molekyler åt, är av samma storleksordning som det, vilket erfordras för att skilja två atomer i samma molekyl. Det kan därför enligt Thomson i många fall förklara bildningen av dubbelmolekyler och komplexa föreningar.

Den kemiska bindningen mellan två atomer beror emellertid enligt Thomson icke blott på den attraktion, som de på grund av sitt elektriska moment utöva på var-

ann, ty denna attraktion är i hög grad beroende på atomernas inbördes ställning och kan för vissa lägen övergå till repulsion, utan för att en kemisk bindning skall äga rum, fordras även, att atomerna skola äga några fritt rörliga elektroner, vilka kunna inställa sig i ett sådant läge, att de kunna bindas vid båda atomerna. Från dessa elektroner utgå således kraftrör till båda atomerna, och om dessa icke äga några fria valenser, så måste därför för varje kraftrör, som utgår från den ena atomen, ett annat komma in från någon annan atom. Dock behöver detta icke vara samma atom, till vilken det förstnämnda röret utgår, utan kan även vara en tredje atom. Detta möjliggör således en ringbindning även för envärdiga atomer. Man skulle t ex. kunna ha en vätemolekyl av följande struktur:

Med undantag härav skulle därför varje enkel bindning motsvaras av två kraftrör och likaledes i allmänhet varje dubbelbindning av fyra kraftrör. En annan följd av Thomsons teori blir, att benzol erhåller följande fullständigt symmetriska formel, vilken, som man ser, nära överensstämmer med Kauffmanns. (II, sid. 8.)



Kossels teori.

Denna teori uppställdes 1916[1]. I likhet med Bohr och Thomson anser Kossel, att affiniteten är av elektrisk natur. I avseende på atomernas byggnad ansluter sig Kossel i huvudsak till Bohrs teori, dock med den skillnaden, att han sätter antalet elektroner i den yttersta elektronringen lika med numret på den grupp i det periodiska systemet, dit det ifrågavarande elementet hör. Detta gör han emellertid på rent kemiska grunder utan att göra några beräkningar över de så konstruerade systemens stabilitet. Därigenom erhålla nämligen kemiskt närbesläktade ämnen samma antal elektroner i den yttersta elektronringen, vilket överstämmer med Rutherfords och Bohrs åsikter, att elementens kemiska egenskaper huvudsakligen bero på de yttersta elektronerna, Vid övergången från ett element till det nästföljande i det periodiska systemet ökas alltså antalet elektroner i den yttersta elektronringen med 1, under det att de inre ringarna förbli oförändrade, utom vid övergången från ädelgaserna till första gruppen, då det i stället bildas en ny yttre ring med 1 elektron. Nedanstående tabell utvisar anordningen av elektronerna hos de 25 första elementen, varvid siffrorna inom parenteserna ange antalet elektroner i ringarna, räknade inifrån utåt.

	H (1)			
He	Li	Be	B	C
(2)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
Ne	Na	Mg	Al	Si
(2, 8)	(2, 8, 1)	(2, 8, 2)	(2, 8, 3)	(2, 8, 4)
Ar	K	Ca	Sc	Ti
(2, 8, 8)	(2, 8, 8, 1)	(2, 8, 8, 2)	(2, 8, 8, 3)	(2, 8, 8, 4)

N	O	Fl
(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)
P	S	Cl
(2, 8, 5)	(2, 8, 6)	(2, 8, 7)
V	Cr	Mn
(2, 8, 8, 5)	(2, 8 , 8, 6)	(2, 8, 8, 7)

[1] Annalen der Physik (4) 49; 229.

I likhet med Thomson tillskriver Kossel atomerna en tendens att övergå till ädelgasernas atomstruktur, såsom varande den mest stabila. Detta kan ske antingen genom att avge eller genom att upptaga elektroner, allt efter som de övergå till den närmast föregående eller den närmast efterföljande ädelgasens struktur. Härav följer att samma element ibland kan antaga en positiv och ibland en negativ laddning. Kossel kommer därför till samma åsikt som Abegg, att alla element hava både positiva och negativa valenser (II, sid. 2). Summan av dessa positiva och negativa valenser är tydligen lika med skillnaden mellan två på varandra följande ädelgasers elektronantal, och blir alltså för de små perioderna lika med 8. Detta skulle alltså vara orsaken till att summan av Abeggs normal- och kontravalenser är lika med 8. Men Kossel framhåller, att detta icke kan gälla för de stora perioderna, där skillnaden mellan antalet elektroner hos två på varandra följande ädelgaser är lika med 18. I dessa perioder råda enligt Kossel mera invecklade förhållanden, som tills vidare få betraktas som outredda.

Att atomerna genom att upptaga eller avgiva elektroner kunna bilda mer stabila system, än de äro i neutralt tillstånd, utgör enligt Kossel förklaringen på, att ionerna i många fall reagera mindre kraftigt än de neutrala atomerna, vilket t. ex. visar sig i alkalimetallernas och deras ioners förhållande till vatten. Detta har ju vanligen brukat förklaras så, att ionerna äga ett helt annat energiinnehåll än de neutrala atomerna och därför också måste visa helt andra kemiska egenskaper. Men om skillnaden egentligen skulle utgöras av ionernas elektriska laddning, så förefaller det, som om detta snarare skulle öka än minska reaktionsförmågan. Kossel lämnar emellertid, som man ser, en synnerligen naturlig förklaring på saken.

I fråga om bindningen mellan två atomer har Kossel upptagit Bohrs idé, att detta sker genom sammanslutningen av de yttersta elektronringarna till en, vilken genom sin attraktion av de positiva atomresterna sammanhåller de båda atomerna. Men han har gjort ett intressant tillägg

därutinnan, att han påpekar, att denna rings ställning icke alltid är mitt emellan de båda atomkärnorna, som Bohr antar, utan att ringens läge beror på attraktionen mellan ringen och atomresterna och följaktligen på dessas laddning. Som denna kan vara högst olika, växlar läget även betydligt. Endast för kärnor, som äga lika positiv laddning, t. ex. två vätekärnor, är ringen mitt emellan kärnorna, men för andra t. ex. HCl är den i det närmaste i kloratomens plan, ty atomrestens positiva laddning hos Cl, sedan de 7 yttre elektronerna ingått i den gemensamma ringen, är 7 gånger så stor som hos väteatomens kärna. Detta innebär praktiskt taget detsamma som, att väteatomen avgivit en elektron till kloratomen. På detta sätt förklarar Kossel den intramolekylära ionisationen. Förklaringen överensstämmer, som man ser, i huvudsak med Thomsons (III, sid. 14); skillnaden är endast den, att Kossel icke antar någon skarp gräns mellan ioniserade och icke-ioniserade molekyler, ty den gemensamma elektronringen kan ju intaga alla möjliga lägen mellan de båda kärnorna. Om dessa skulle åtskiljas genom dissociation, skulle den gemensamma ringen följa med den kärna, som den vore närmast, vilket skulle förklara den elektrolytiska dissociationen. Förklaringen låter ju mycket naturlig och stämmer också bra med de exempel Kossel anför, men i en del andra fall stämmer den däremot icke alls. Så t. ex. är det oförklarligt, varför H_2O huvudsakligen dissocieras i $\overset{+}{H}$ och $\overset{-}{OH}$ i stället för $2\overset{+}{H}$ och $\overset{--}{O}$. Kossels förklaring torde därför knappast kunna betecknas som tillfredsställande.

I fråga om affinitetens olika styrka inskränker sig Kossel till att försöka förklara den hos de ioniserade eller, som han i likhet med Abegg säger, polära föreningarna. Hos dessa skulle affinitetens styrka uteslutande bero på atomernas laddning och avståndet mellan deras medelpunkter i enlighet med Coulombs lag. Såsom exempel på laddningens inflytande anför Kossel följande serie: KOH, $Mg(OH)_2$, $Al(OH)_3$, $Si(OH)_4$, $PO(OH)_3$, $SO_2(OH)_2$, $ClO_3(OH)$. I denna ökas successivt centralatomens positiva laddning

från K, där den är = 1, till Cl, där den är = 7. Därigenom ökas också attraktionen mellan centralatomen och syreatomerna och likaledes repulsionen mellan centralatomen och väteatomerna. Härav följer, att benägenheten att avspjälka H och binda O successivt ökas i serien. De två första föreningarna avspjälka därför nästan uteslutande $\overset{-}{OH}$, de fyra sista däremot $\overset{+}{H}$, d. v. s. de förra äro baser, de senare åter syror. $Al(OH)_3$ kan däremot avspjälka både $\overset{-}{OH}$ och $\overset{+}{H}$ i mätbara mängder. Enligt Kossel skulle alltså alla hydroxylföreningar kunna avspjälka både $\overset{-}{OH}$ och $\overset{+}{H}$, ehuru endast vissa utav dem, de s. k. amfotera elektrolyterna, göra det i mätbara mängder.

Utom på laddningens storlek skulle affinitetens styrka även bero på avståndet mellan atomernas medelpunkter, d. v. s. på atomvolymen. Såsom exempel härpå påpekar Kossel, att alkalihydroxyderna äro starkare baser, d. v. s. kunna lättare avspjälka $\overset{-}{OH}$, ju större metallens atomvolym är, och att likaså de komplexa ammoniakföreningarna lättare avge H_3N, ju större centralatomens atomvolym är.

Som man ser, kunna många exempel anföras som stöd för Kossels försök att förklara affinitetens styrka på rent elektrostatiska grunder, men att i detalj genomföra denna förklaring stöter dock på mycket stora svårigheter, vilket Kossel också själv framhåller. Det skulle emellertid bliva alltför vidlyftigt att närmare ingå därpå.

Vad de komplexa och molekylära föreningarna beträffar, ansluter sig Kossel i huvudsak till Werners teori om bivalenser, men han försöker att förklara dessa valenser på följande sätt, varvid han likaledes inskränker sig till de polära föreningarna. Det antal atomer, som en laddad atom förmår binda, beror icke blott på storleken av dennas laddning, utan även på det arbete, som uträttas vid bindningen. Detta arbete består av två termer: den ena, φ (a), uttrycker det arbete, som attraktionen mellan atomerna

uträttar vid bindningen, den andra, $\varphi(r)$, uttrycker det arbete, som behöves för att övervinna den repulsion, som de förut bundna atomerna utöva på den som bindes. Den senare termen är naturligtvis = 0 för den första atom, som bindes vid centralatomen, och växer sedan för varje nytillkommen atom med samma slags laddning. Skillnaden $\varphi(a) - \varphi(r)$ uttrycker det arbete, som uträttas vid varje atoms bindning vid centralatomen, och när detta blir = 0, är gränsen för det antal atomer, som centralatomen förmår att binda, uppnådd. Detta antal behöver icke vara detsamma, som antalet av centralatomens elektriska enhetsladdningar, d. v. s. dess huvudvalenser, utan är i regeln större. En atom kan därför i allmänhet binda fler atomer än den har huvudvalenser, men sedan bindningen väl skett, finnes enligt Kossel ingen skillnad mellan de genom huvudvalenser bundna atomerna och de övriga. Häruti skiljer sig Kossels åsikt från Werners, enligt vilken det dock skulle finnas en skillnad mellan huvudvalenser och bivalenser, ehuru han icke är i stånd att klart ange, varuti denna skillnad består (I, sid. 6) Dessutom gäller Kossels förklaring, som ovan nämndes, icke för neutrala atomer, utan endast för elektriskt laddade. Men även för dessa senare torde det ofta bli svårt att på grund av deras ömsesidiga attraktion och repulsion räkna ut, hur många atomer en viss atom förmår binda, och ännu svårare torde det nog bli att få resultatet att i allo stämma med erfarenheten.

Som det framgår av denna redogörelse för teorierna om affinitetens natur, kan ingen av dem sägas ha löst problemet på ett fullt tillfredsställande sätt. Man torde nog ha skäl att på dem allesamman tillämpa det omdöme, som Stark fäller om sin egen teori, nämligen att den endast är att betrakta som ett förarbete för en kommande verklig affinitetsteori, och det är även all anledning att instämma i den förhoppning, som han på samma gång uttalar, nämligen att en ny Berzelius måtte uppstå, som på grund av dessa förarbeten vore i stånd att lösa affinitetens lika invecklade som intressanta problem.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Angående höstterminens studentskrivningar.

Uppgift 5 lydde: På en regelbunden femhörning som bas är uppritad en pyramid med fem liksidiga trianglar till sidoytor. Beräkna den i pyramiden inskrivna sfärens volym, då femhörningens sida $= a$.

Uppgiften är ej svår, men synes leda till nog så långa räkningar. Att slutresultatet emellertid kan framställas under relativt enkel form och framför allt under en form lämplig för logaritmisk kalkyl torde ej alldeles sakna intresse. Förenas medelpunkten med pyramidens hörn erhålles 6 delpyramider, alla med höjden r, varav ekvationen:

$$\frac{r}{3}\left(\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{5a^2\operatorname{tg}54^\circ}{4}\right)=\frac{5a^2\operatorname{tg}54^\circ}{3\cdot 4}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2\operatorname{tg}^2 54^\circ}{4}}$$

$$\therefore\ r=\frac{a\operatorname{tg}54^\circ}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}54^\circ}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}54^\circ}}=\frac{a\operatorname{tg}54^\circ}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}54^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}54^\circ}}=$$

$$=\frac{a\operatorname{tg}54^\circ}{2}\cdot\sqrt{\frac{\sin 6^\circ}{\sin 66^\circ}}$$

och

$$V=\frac{\pi a^3}{6}\left(\frac{\sin 6^\circ\operatorname{tg}^2 54^\circ}{\sin 66^\circ}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

S. B—n.

Anmärkning till försök med Galileis ränna.

Härvarande läroverk äger i sin samling en Galileis ränna, bestående av en kantställd c:a 2 m. lång furubräda med en halvcylindrisk urkälning i övre kanten. Till apparaten, vilken av utstyrseln att döma, synes vara tillverkad i Danmark, hör en blankpolerad stålkula med omkring 1 cm:s diameter, som kan rulla på rännans botten, d. v. s. kring sin egen storcirkel (fig. 1). Ersätter man denna med en större kula av samma slag befinnes denna senare, om den rullar på rännans kanter (fig. 2 a)

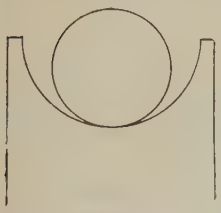


Fig 1.

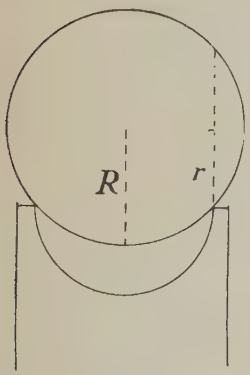


Fig. 2 a.

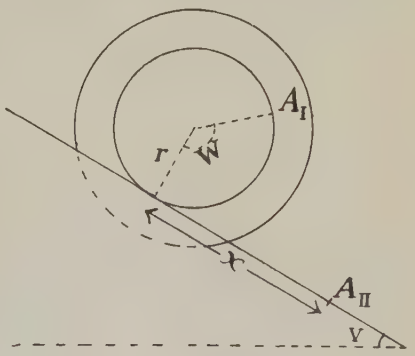


Fig. 2 b.

få mindre acceleration än den mindre kulan. Detta konstateras lätt, om båda få samtidigt börja sin rörelse.

Detta resultat verkar vid första påseendet överraskande, enär friktionskrafter kunna antagas spela mindre roll ju större klot man väljer. Då försöket bekvämt demonstrerar rotationsenergiens betydelse vid försök av denna art, kan en förklaring till detsamma möjligen vara av intresse.

Om ett klot rullar längs ett lutande plan, omsättes tyngdkraftens arbete dels i translationsenergi ($\frac{1}{2}Mh^2$), dels i rotationsenergi ($\frac{1}{2}K\omega^2$). Rotationsenergien ökas, då vinkel-

hastigheten ω ökas, och denna senare tilltar i mån som rullningsradien avtar. Enligt levande kraftprincipen måste härvid translationsenergien och därmed också hastigheten minskas på sätt som följande enkla räkning närmare visar.

Rullar klotet utan glidning, faller A_1 in på A_2 (fig. 2 b) och man får:

$$x = rw;$$

eller

$$h = \frac{dx}{dt} = r\frac{dw}{dt} = r\omega; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Enligt levande-kraft-principen fås:

$$Mgx \sin v = \tfrac{1}{2}Mh^2 + \tfrac{1}{2}K\omega^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

För ett klot är tröghetsmomentet $K = \frac{2}{5}MR^2$. Ur (2) fås enligt (1)

$$2gx \sin v = h^2\left[1 + \frac{2R^2}{5r^2}\right]$$

eller

$$h = \sqrt{2\,\frac{g \sin v}{1 + \frac{2R^2}{5r^2}} \cdot x}.$$

För translationen blir accelerationen sålunda

$$\frac{g \sin v}{1 + \frac{2R^2}{5r^2}},$$

varav synes att denna storhet minskas, om r minskas. Är $r = R$, blir accelerationen $\frac{5}{7}g \sin v$, d. v. s. $\frac{5}{7}$ av den acceleration en glidande kropp skulle erhålla på samma lutande plan.

Borås 1919. *Edv. Björnsson.*

Frågor och svar.

Fråga: Om en stålfjäder spännes, så innehåller den en viss kvantitet energi mer än om den är ospänd. Om

vi tänka oss den löst i salpetersyra, vart tar då energin vägen? *F. C.*

Svar: Då en spänd stålfjäder löses i en syra, måste mer energi frigöras, än då en likadan ospänd fjäder löses, såvida energiprincipen är sann. Detta kan ske därigenom, att partiklar utslungas i lösningsmedlet med större hastighet från den spända än från den ospända fjädern.

Genom att spänna en urfjäder kan man i varje gram av fjädern magasinera c:a 0,02 kgm. Vid lösning av 1 gr. järn i svavelsyra utvecklas 444 grkal = 190 kgm. Härav synes, att blott 0,01 % mer energi kan frigöras vid lösning av en spänd mot av en ospänd fjäder. Denna lilla differens kan ej experimentellt påvisas, och man kan således genom ifrågavarande experiment ej få något bevis för eller mot energiprincipen, men väl kan man på antytt sätt förklara full överensstämmelse med nämnda princip.

O G—r.

Matematiska uppgifter.

55) I en cirkel med medelpunkten O och radien r äro två punkter P och P_1 tagna på samma diameter och på samma sida om O samt så, att $OP \cdot OP_1 = r^2$. Om genom P drages en godtycklig korda APB, så är PP_1 en av bissektriserna till AP_1B. *X.*

56) I varje fyrsidig figur är summan av sidornas kvadrater lika med summan av diagonalernas kvadrater, ökad med 4 gånger kvadraten på den linje, som förenar diagonalernas mittpunkter. *M—r.*

57) I varje tetraeder är summan av kanternas kvadrater 4 gånger så stor som summan av kvadraterna på de tre linjer som förbinda mittpunkterna av de motstående kanterna. *N. F. Jenssen.*

58) Sätt $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ och sök $\lim_{n=\infty} x_n$.

59) Av de tre sträckorna a, b, c kan bildas en egentlig triangel, om och endast om ekvationen

$$a^2x^2+(a^2+b^2-c^2)x+b^2=0$$

har imaginära rötter.

60) Beräkna n:te derivatan av $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$, då $x^2<1$ och $n>1$. *X.*

Lösningar till uppgifterna i häftet 4. 1918—19.

43) *För alla positiva värden på* a, b, c *är* $(a+b+c)^3 \geqq 27abc$.

Utan att inskränka generaliteten kunna vi sätta $a=c+x$, $b=c+y$, där x och y äro positiva eller 0. Påståendet blir då:

$$(3c+x+y)^3 \geqq 27c(c+x)(c+y)$$

eller

$$27c^3+27c^2(x+y)+9c(x+y)^2+(x+y)^3 \geqq 27c^3+27c^2(x+y)+ +27cxy,$$

varav

$$(x+y)^2 \geqq 3xy \cdot \frac{9c}{9c+x+y},$$

vilket är sant, om $(x+y)^2 \geqq 3xy$ eller $(x-y)^2+xy \geqq 0$. Men detta är sant, emedan x och y äro $\geqq 0$. *C. H.*

Tillägg.

$(a+b+c)^3 \geqq 27abc$ för positiva a, b, c är ju specialfallet $n=3$ av den allmänna satsen: *Aritmetiska mediet* $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ *mellan n positiva tal kan aldrig understiga det geometriska* $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Cauchy ha givit ett berömt induktionsbevis för denna sats, vilket (enl. Jensen) lätt utvidgas till »konvexa» funktioner.

En funktion $f(x)$ definierad för alla x-värden $a \leqq x \leqq b$ och så beskaffad att

$$\tfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \geqq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \quad a \leqq x_1,\ x_2 \leqq b,$$

säges vara konvex inom intervallet i fråga.

Sats. För varje sådan funktion $f(x)$ är

$$\frac{1}{n}\left(f(x_1)+ \ldots +f(x_n)\right) \geqq f\left(\frac{x_1+x_2+ \ldots +x_n}{n}\right), \ n=2,3, \ldots,$$

blott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tillhöra intervallet.

I det följande beviset bör observeras, att

$$\frac{x_1+x_2+ \ldots +x_n}{n}$$

tillhör intervallet, om $x_1, \ldots, x_n$ göra det; $n=2, 3, \ldots$

1. Om satsen är riktig för ett visst n, är den riktig för $2n$.

Ty för $a \leqq x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots x_n, y_n \leqq b$ är

$$\frac{1}{2n}\{f(x_1)+f(y_1)+ \ldots +f(x_n)+f(y_n)\}=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_1)+f(y_1)}{2}+ \ldots +\frac{f(x_n)+f(y_n)}{2}\right\} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)+ \ldots +f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\right\} \geqq$$

$$\geqq f\left(\frac{\frac{x_1+y_1}{2}+ \ldots +\frac{x_n+y_n}{2}}{n}\right)=f\left(\frac{x_1+y_1+ \ldots +x_n+y_n}{2n}\right)$$

Då satsen enligt antagandet gäller för $n=2$, gäller den alltså för $n=4, 8, 16 \ldots$

2. Om satsen är riktig för ett visst n, är den riktig för $n-1$.

Sätt $x_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$ i olikheten

$$\frac{1}{n}\{f(x_1)+\ldots+f(x_n)\} \geqq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right),$$

så erhålles

$$\frac{1}{n}\left\{f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)\right\} \geqq$$

$$\geqq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right); f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+$$

$$+f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right) \geqq n\cdot f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right);$$

$$f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}) \geqq (n-1) f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right);$$

$$\frac{1}{n-1}\{f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\} \geqq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right),$$

där $x_1, \ldots, x_{n-1}$ äro godt. tal i intervallet.

Ur 1 och 2 följer satsens allmänna riktighet

$f(x)=e^x$ är konvex för $-\infty < x < +\infty$, ty $\frac{1}{2}\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right) - e^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{\left(e^{\frac{x_1}{2}}-e^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2} \geqq 0$, hur x_1, x_2 än väljas. Vidare finnes till varje pos. a ett (och endast ett) x så att $a=e^x$.

Ur $\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{n} \geqq e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}$, som gäller för alla reella $x_1, \ldots, x_n$, följer således $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ för alla positiva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. $\left(a_r=e^{x_r}\right)$. Likhetstecknet gäller för övrigt endast, då alla a äro lika

Ty antag, att

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}=0,\quad a_1\neq a_2.$$

Om då $a_1'=a_2'=\frac{a_1+a_2}{2}$, $a_3'=a_3$, $\ldots$, $a_n'=a_n$, så är

$$\frac{a_1'+a_2'+\ldots+a_n'}{n}=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n};\quad (a_1'a_2'a_3'\ldots a_n')^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\left[\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3\ldots a_n\right]^{\frac{1}{n}}>(a_1a_2a_3\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1'+a_2'+\ldots+a_n'}{n},$$

då $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-a_1a_2=\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2>0$. Således skulle för $a_1', \ldots, a_n'$ det geometriska mediet överstiga det aritmetiska, vilket är orimligt.

Om $f(x)$ är kontinuerlig för $a\leqq x\leqq b$ samt $f''(x)$ existerar och är $\geqq 0$ för $a<x<b$, är $f(x)$ konvex i intervallet, ty för $b\geqq x_2>x_1\geqq a$ är enligt medelvärdessatsen

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_2-x_1}{2}f'(x_1),$$

$$x_1<\bar{x}_1<\frac{x_1+x_2}{2},$$

och $f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_2-x_1}{2}f'(\bar{x}_2)$,

$$\frac{x_1+x_2}{2}<\bar{x}_2<x_2,$$

varav $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{4}(x_2-x_1)\{f'(\bar{x}_2)-f'(\bar{x}_1)\}=$

$$=\frac{(x_2-x_1)(\bar{x}_2-x_1)}{4}f''(\bar{x}),\quad \bar{x}_1<\bar{x}<\bar{x}_2;$$

alltså är vänstra membrum $\geqq 0$.

Ex. *a*) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. $\operatorname{tg} x$ är konvex för $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$. Alltså är för spetsiga positiva vinklar u, v, w:

$$\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v > 2\operatorname{tg}\frac{u+v}{2}$$ [1] ($f''(x)>0$ inom intervallet),

$$\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w > 3\operatorname{tg}\frac{u+v+w}{3}$$ o. s. v.

b) $f(x)=-\sin x$, $f'(x)=-\cos x$; $f''(x)=+\sin x$. Således är $-\sin x$ konvex för $0 \leqq x \leqq \pi$ och för vinklar inom detta intervall är $\sin\dfrac{u+v}{2} > \dfrac{\sin u+\sin v}{2}$ o. s. v.

»Konvexiteten» framgår ju för övrigt direkt av utseendet hos kurvorna $y=\operatorname{tg} x$, $y=-\sin x$. *X.*

44) *Finnas några punkter på hyperbeln* $y^2=x^2+x+1$, *för vilka båda koordinaterna äro hela tal?*

Genom lösning fås $x=\dfrac{-1 \pm \sqrt{4y^2-3}}{2}$. Skall x vara ett helt tal, måste således $4y^2-3=p^2$, eller $(2y+p)(2y-p)=3$, då p är helt tal. Detta ger ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2y+p= & 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2y-p= & 1 & 3 & -1 & -3 \end{cases}$$

varav

$$\begin{cases} y= & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ p= & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ x= & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{cases}.$$

Det finnes således de 4 punkterna (0, 1), (0, −1), (−1, 1)(−1, −1). *C. H.*

45) *På hur många sätt kan en krona växlas i nu gällande svenskt kopparmynt? I hur många av dessa fall erhålles minst ett mynt av varje slag?*

[1] För $\operatorname{tg}\frac{u}{2}=\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\beta$, följer därur $\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}+\dfrac{\beta}{1-\beta^2} > \dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ för $0 \leqq \alpha, \beta < 1$.

Ekvationen blir $x+2y+5z=100$, där x, y, z äro antalet 1-ören, 2-ören och 5-ören resp.

1) Om z är ett jämnt tal, så kunna vi hava

$z=$ 0, 2, 4, 6 . . . 20 (11 värden)

$x+2y=$ 100, 90, 80, 70 . . . 0

sål. $y \leqq$ 50, 45, 40, 35 . . . 0. Sål. kan y väljas på resp.

51, 46, 41, 36 . . . 1 olika sätt $= \frac{11 \cdot 52}{2} = 286$ sätt.

2) Om z är ett udda tal, så kunna vi hava

$z=$ 1, 3, 5, 7 . . . 19 (10 värden)

$x+2y=$ 95, 85, 75, 65 . . . 5 .

sål. $y \leqq 47{,}5,\ 42{,}5,\ 37{,}5,\ 32{,}5 \ldots 2{,}5$. Således kan y väljas på resp.

48, 43, 38, 33 . . . 3 olika sätt $= \frac{10 \cdot 51}{2} =$

$=255$ olika sätt.

Vi få således sammanlagt 541 sätt.

Om x, y, z ej får vara $=0$, så få vi på snarlik väg 461 sätt.

(Löst av *C. H.*)

46) *Från den omskrivna cirkelns medelpunkt i en triangel dragas normaler n_a, n_b och n_c mot sidorna a, b, c. Bevisa att $n_a+n_b \pm n_c = \varrho + r$, då ϱ och r äro den omskrivna och den inskrivna cirkeln radier. Det övre tecknet gäller om triangeln är spetsvinklig, det undre om vinkeln γ är trubbig.*

För en spetsvinklig triangel fås omedelbart

$$n_a = \varrho \cos \alpha \text{ o. s. v.,}$$

således
$$n_a+n_b+n_c = \varrho(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) =$$
$$= \varrho\left(1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$
$$= \varrho + 4\varrho \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \varrho + r.$$

Varför tecknet för n_c bör ändras, om $\gamma > 90°$ inses omedelbart ur en figur.

(Löst av *G. B—k* och *C. H.*)

47) *Ett smalt knippe vitt ljus infaller vinkelrätt mot en sidoyta av ett prisma med 30° brytande vinkel. Det upp-*

fångas på en skärm parallell med och på 50 cm. avstånd från prismats andra sidoyta. Därstädes befinnes spektrum upptaga en längd av 4,95 cm. Sök prismats brytningsexponent för de yttersta violetta strålarna, när man vet, att den för de yttersta röda är 1,60.

Vi få med figurens beteckningar:

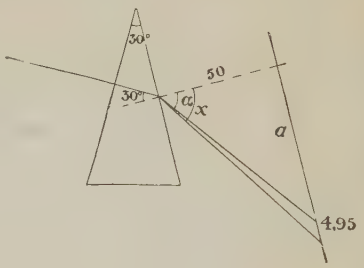
$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ}=1{,}6 \quad \because \operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3};$$

$$4{,}95=50(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha)$$

$$\because \operatorname{tg}x=1{,}432;$$

$$x=55^\circ{,}08,$$

$$n_v=1{,}64.$$



G. B—k.

48) *I en järnvägskupé som framgår på en rät, horisontel bana, hänger en fritt rörlig pendel. Den befinner sig i vila i 60° vinkel från vertikalen. Vad vet man därigenom om tågets rörelse?*

På kulan verkar tyngdkraften p, spänningen i snöret s, samt tröghetsmotståndet $mG=\frac{p}{g}\cdot G$, där G är tågets och g tyngdens acceleration. S upplöses i en horisontal och en vertikal komposant. Jämviktsvillkoren bliva då:

$$\begin{cases} p=s\cos v \\ \frac{p}{g}\cdot G=s\sin v\cdot \end{cases}$$

varav $G=g\operatorname{tg}v$, eller genom insättning av $g=9{,}8\ ^{m.}/_{sek.^2}$ och $v=60^\circ$. Tågets acceleration $16{,}97\ ^{m.}/_{sek.^2}$.

(Inga lösningar inkomna.) *Aaker Kofoed.*

Algebraisk metod vid den tidigare geometriundervisningen.

Av OLOF JOSEPHSON.

Det har måhända ansetts som en självfallen sak, att geometrin vid skolundervisningen rätt länge skall behandlas så gott som uteslutande syntetiskt. Först på ett senare stadium införas sträckors mätetal, varefter algebraisk behandling förekommer vid sidan av den syntetiska. Denna ordning är ofrånkomlig, om man vill från början följa Euklides' mönster, och även oavsett detta finnas talande skäl för att gå från det kvalitativa till det kvantitativa. Metoden är emellertid ingalunda den enda tänkbara. Och om det nu skulle behövas ett försvar för en motsatt väg, den att så tidigt som möjligt låta talsambanden i en geometrisk figur komma till uttryck och användning, så kunde det vara nog att påpeka, hurusom i den moderna fysikundervisningen kvantitativa mätningar höra till det grundläggande: man uttalar de fysikaliska lagarna i kvantitativ form, erhållen genom mätningsresultaten.

Vissa yttre anledningar ha kommit mig att något undersöka möjligheterna att använda algebraisk metod redan vid den tidigare geometriundervisningen. Under åtskilliga år har jag undervisat i geometri i en 8-klassig flickskola, där åt Euklideisk geometri ej kan anslås mer än 1 veckotimme cirka 3 läsår. Knappast är jag ensam om erfarenheten av det otacksamma i en sådan uppgift. Den fasthet i den formella framställningen, utan vilken en Euklideisk behandling av geometrin blir ett oting, kan knappast vinnas utan en mer koncentrerad undervisning under första läs-

året. De vanliga 8-klassiga flickskolornas timplaner upptaga på det ifrågavarande stadiet endast 3 veckotimmar för matematiken, och självfallet behövas 2 av dessa för räkneundervisningen. Geometrin har således där en synnerligen blygsam ställning. Härtill kommer, att någon övning i ren algebra är önskvärd även i flickskolan. Det har t. ex. visat sig, att flickor, som genomgått en fullständig sådan skola, kunna ha svårt att fatta innebörden av en enkel fysikalisk formel, ovana som de äro vid algebraiskt beteckningssätt. Skulle nu geometriundervisningen kunna gestaltas så, att den även gåve eleverna en viss vana vid algebraiska transformationer av enklaste slag, vore ej så litet vunnet. Vad de allmänna läroverken och de kommunala mellanskolorna beträffar, är det svårt att a priori avgöra, vilka fördelar eller olägenheter det skulle medföra att låta planimetriska synpunkter komma till användning tidigare än nu, med uppskjutande till gymnasialstadiet av syntetisk geometri i större utsträckning. Den syntetiska geometrin har så att säga en mer aristokratisk prägel och passar därför ej illa på ett högre bildningsstadium. Men även om man lämnar denna fråga fullkomligt öppen, torde det ha sitt intresse att se, i vad mån man kan låta en algebraisk behandling av geometrin träda in tidigt.

Det är nu att märka, att nästan den första geometriska kunskap, som skolan meddelar, innebär ett talsamband, nämligen metoden att beräkna en rektangels yta. Detta hör ju till de första skolårens räkneövningar. Härtill kan en algebraisk behandling av geometrin naturligt anknytas; ty, som vi skola se, är det just *rektangelns existens, symmetriegenskaper och ytinnehåll*, på vilka den algebraiska behandlingen kan grundas. Att geometriundervisningen fortfarande skall börja med enkla mätnings- och konstruktionsövningar, lär väl vara självfallet. Dessa komma helt naturligt att först omfatta användningar av (graderad) linjal och vinkelhake, därmed också speciellt studium av rektangelns egenskaper. Såsom experimentellt faktum (»axiom») erhålles då satsen:

I. *Om tre vinklar i en plan fyrhörning äro räta, är också den fjärde vinkeln rät* (m. a. o. rektangelns existens).

Såsom ytterligare resultat av de första övningarna framgår vidare:

II. *Motstående sidor i en rektangel äro lika stora* (rektangelns axiala symmetri[1]).

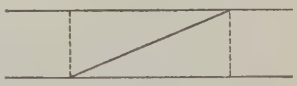
III. *En rektangel delas av vardera diagonalen i två kongruenta trianglar* (rektangelns centriska symmetri; specialfall av 1:a kongruensfallet).

(Det må tillhöra ett längre framskridet stadium att visa, hur de båda sista satserna kunna syntetiskt bevisas genom plana figurers förskjutning och omläggning i sitt eget plan.) Åt de båda första satserna kan man ge en annan formulering, om man definierar parallella räta linjer såsom *räta linjer i samma plan, som där ha en gemensam normal.* De bli då ekvivalenta med följande:

I a. *Parallella räta linjer ha överallt gemensamma normaler.*

II a. *Parallella räta linjer ha överallt samma inbördes avstånd.*

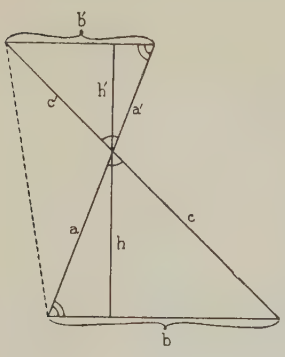
Sats III ger då omedelbart, såsom vidstående figur antyder, att alternatvinklar vid parallella linjer äro lika stora, varav på vanligt sätt följer satsen om *triangelns vinkelsumma;* denna åter leder till omvändningen av den nyssnämnda satsen, nämligen att alternatvinklars likhet också är ett tillräckligt villkor för parallellism.



Härmed är den rent geometriska grundval lagd, varpå sedan en algebraisk behandling kan byggas. Det ligger i sakens natur, att en sådan behandling i stor utsträckning kommer att använda sig av *Pytagoras' sats,* vilken det alltså gäller att snarast möjligt nå fram till. Först härledes formeln för rektangelns yta, $R = bh$, till den omfattning, som motsvarar lärjungarnas ståndpunkt i fråga om talbegreppet. Av denna erhålles enligt sats III omedelbart

[1] Jmf. författarens Lärobok i plangeometri, I, sid. 33.

ytan av en rätvinklig triangel och härav (genom addition eller subtraktion) formeln för triangelns yta, $T = \frac{bh}{2}$.



Vi tänka oss nu två inbördes likvinkliga trianglar T och T' med baserna b och b', höjderna h och h'. De kunna tänkas placerade så, som vidstående figur antyder, varvid på grund av alternatvinklarnas likhet b och b' bli parallella[1]. Genom den dragna konstruktionslinjen erhålles en femhörning, för vars yta vi erhålla två uttryck, vilka måste vara lika:

$$\frac{b'(h+h')}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{b(h+h')}{2} + \frac{b'h'}{2}.$$

Denna likhet ger omedelbart

$$b'h = bh'$$

$$\therefore \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'}.$$

Nu erhålles

$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

Då man ju lika gärna kunnat välja två andra, liknande placeringar av de båda trianglarna, erhålles med vanliga beteckningar

$$\frac{T}{T'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}$$

och härav

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Man har således redan här de viktigaste satserna rörande

[1] En annan, analog bevismetod finns i förf:s plangeometri, I, sid. 80 o. 81.

likformiga trianglar. På vanligt sätt kan då Pytagoras' sats härledas såsom ett *talsamband* i en rätvinklig triangel. I omedelbar anslutning härtill införes begreppet kvadratrot, och man låter lärjungarna göra en del kvadratrotsbestämningar genom uppritning av rätvinkliga trianglar med lämpliga siffervärden på två av sidorna.

Nu är det naturligtvis ej min mening, att allt detta skall tagas så brådstörtat, som det kan tyckas av denna korta översikt. Dels såsom förberedelse, dels såsom tillämpningar skola komma fortsatta konstruktionsövningar, vidare övningar i algebraiska reduktioner med särskilt aktgivande på sådana, som medgiva en enkel geometrisk tolkning, såsom utvecklingarna av $a(b+c)$, $(a+b)(c+d)$, $(a+b)^2$ o. s. v., slutligen planimetriska räkneuppgifter, tillhörande det ifrågavarande området, med användande även av kvadratrottabeller.

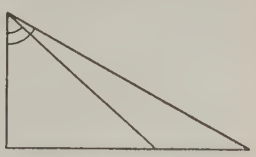
Ett par viktiga geometriska satser äro omedelbara följder av Pytagoras' sats i den form den här tänkts erhållen, nämligen satserna om

mittpunktsnormalen såsom geometrisk ort och

avstånd från en punkt utanför en rät linje till olika punkter på denna.

Den förstnämnda tillämpas på vanliga konstruktionsuppgifter; till den andra skola vi snart återkomma.

Ville man nu fortsätta utan andra analytiska hjälpmedel än ren algebra, så kunde man närmast upptaga projektionssatserna (Eukl. II: 12, 13). Men man måste i varje fall snart nog komma till frågor rörande sambandet mellan en figurs sidor och vinklar, och det är därför bättre att omedelbart införa de *trigonometriska funktionerna.* Detta möter inget hinder, eftersom sidornas proportionalitet i inbördes likvinkliga trianglar redan är klargjord och använd; funktionerna kunna därför definieras som vanligt för spetsiga vinklar såsom talförhållanden i rätvinkliga trianglar. Den ovannämnda satsen om de olika avstånden från



en punkt till en rät linje ger omedelbart, att en spetsig vinkels cosinus avtager, då vinkeln växer. Pytagoras' sats ger ju formeln $\sin^2 v + \cos^2 v$ 1, varav framgår, att sinus växer med vinkeln. Använder man även tangentfunktionen — vilket ej är nödvändigt för de följande härledningarna, men givetvis förmånligt för räkneuppgifter rörande rätvinkliga trianglar — så finner man av figuren här ovan, att även den är växande. Härmed är klargjort, att en spetsig vinkel är entydigt bestämd genom vilken som helst av de nämnda funktionerna, och man kan omedelbart börja använda trigonometriska tabeller.

Nu följer vidare den vanliga härledningen av *sinusteoremet* samt av cosinusformeln $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$, och funktionerna definieras för trubbiga vinklar, så att dessa satser bli generella. I och med sinusteoremet har man 3:e och 4:e kongruensfallen, ävensom Eukl. I: 5, 6, 18, 19; vinkelbisektrisens geometriska ortegenskap erhålles omedelbart med användande av sinusfunktionen. Ur den nämnda cosinusformeln — vilken bl. a. innefattar Eukl. I: 20 — eller ur Pytagoras' sats får man ju vidare *cosinusteoremet* och därmed Eukl. I: 4, 8, 24, 25.

Den närmaste innebörden av kongruensfallen, sådana de framgå ur de trigonometriska satserna, blir givetvis, att i en triangel bestämma vissa element entydigt de övriga. Detta utesluter på intet sätt deras användning för jämförelse mellan två trianglar, således exempelvis härledningen av de vanliga satserna rörande parallellogrammer. Hudvudvikten kommer emellertid med den nu antydda framställningen av triangelläran att läggas dels på de mot kongruensfallen svarande konstruktionsuppgifterna, varav den ovannämnda entydigheten framstår från en annan synpunkt, dels på enkla beräkningsuppgifter med användande av trigonometriska tabeller. Undervisningen i geometri kommer så att på ett tidigt stadium vara riktad på praktiska tillämpningar. Det synes mig, som skulle detta för åtskilliga skolformer vara fullt så givande som exempelvis fullständigare genomgång av Euklides' 1:a och

3:e böcker. I sitt arbete Practical Mathematics säger *J. Perry:* »Just as a boardschool boy is allowed now to perform arithmetical work which was quite beyond the Alexandrian Philosophers, and no one dreams of philosophising over Euclid's 7th, 8th, 9th, and 10th books; so the other books of Euclid must be superseded».

Utsträckes sedan geometrikursen till att omfatta de vanliga satserna om cirkeln — fullständig obekantskap med denna kan det ju aldrig bli tal om, då den ju användes vid de flesta konstruktionsuppgifter — så kan behandlingen i det stora hela ej väsentligt skilja sig från den hävdvunna. I åtskilliga fall (t. ex. Eukl. III: 7, 8, 14, 15) medför det dock väsentlig förenkling att använda algebraisk bevismetod. När man kommer till likformighetsläran och därmed sammanhängande frågor, är ju den algebraiska metoden numera allmänt använd. (Själva likformighetsfallen ligga för övrigt, liksom kongruensfallen, inneslutna i sinus- och cosinusteoremen.)

Naturligtvis kan man sätta i fråga, huruvida en lärogång, sådan som den här skisserade, är jämbördig med den gamla med hänsyn till bildningsvärdet. Gäller det uteslutande *formellt* bildningsvärde, blir svaret helt visst nekande. Om det däremot gäller å ena sidan en vidare syn över matematiken överhuvud, å andra sidan en ur koncentrationssynpunkt önskvärd sammanfogning av ämnets olika delar, synes mig svaret bli det motsatta. I vad mån åter denna lärogång skulle erbjuda större svårigheter än den gamla, vid vilken vi själva tidigt blevo invanda och som därför förefaller oss så naturlig trots dess nog så abstrakta karaktär, därom kan endast erfarenheten fälla utslaget — om nu någon annan än författaren anser det värt ett försök! Kanske kunde denna lilla uppsats åtminstone väcka till liv en diskussion i frågan.

Om koordinattransformationerna vid den allmänna andra grads ekvationen i planet.

Av GUSTAF LINDBORG.

§ 1.

Låt oss utgå från den allmänna andra grads ekvationen (1) i ett tvådimensionellt rätvinkligt koordinatsystem OX, OY, nämligen

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bortskaffandet av xy-termen sker nu, såsom bekant, genom att koordinataxlarna vridas en lämplig vinkel α, och *transformationsformlerna* för de båda samstämmiga rätvinkliga koordinatsystemen bli då

$$x=x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$y=x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

där x_1 och y_1 äro löpande koordinater uti det nya systemet OX_1, OY_1 med samma origo O som nyss. Genom denna vridning av koordinataxlarna antager (1) utseendet

$$A'x_1^2+B'y_1^2+D'x_1+E'y_1+F=0, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

varest den av x och y (samt av x_1 och y_1) oberoende sista termen F fortfarande är densamma som nyss uti (1). De övriga *koefficienterna* i (4) fås enligt formlerna

$$A'+B'=A+B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$A'-B'=\pm\sqrt{(A-B)^2+C^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$D'=D \cos \alpha + E \sin \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$E'=-D \sin \alpha + E \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

där α fås ur $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{A-B}. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Vår mening är nu att anställa några betraktelser över de i § 1 anförda gängse formlerna, vilka formler vi givit det utseende desamma ha i *Collins* »Lärobok i Plan analytisk geometri». Och vi hoppas att dessa våra betraktelser skola betydligt förenkla hela metoden *i dess praktiska tillämpning.*

§ 2.

Fördenskull erinra vi om att det eller de tillvägagångssätt, som författarna rekommendera för *valet av tecknet framför rotmärket* i formeln

$$A' - B' = \pm\sqrt{(A-B)^2 + C^2}, \quad \ldots \quad (6)$$

äro ganska besvärliga att handskas med och svåra att minnas. Vi ämna därför uppställa och bevisa följande *sats*, varigenom valet av tecknet framför rotmärket i (6) kan ske ögonblickligt och utan några som helst extra kalkyler.

Sats. *Om dubbelvinkeln 2α väljes, alltefter tecknet på $\operatorname{tg} 2\alpha$, uti antingen* ***första*** *eller* ***fjärde*** *kvadranten, så får $A' - B'$ alltid samma tecken som $A - B$.*

Bevis. Fördenskull upprätta vi följande teckenschema, varvid den kända formeln (se t. ex. *Collin*)

$$A' - B' = (A-B)\cos 2\alpha + C \sin 2\alpha \quad \ldots \quad (10)$$

kommer till användning, *men endast under själva bevisföringen.* Alltnog, i nedanstående schema höra nu tecknen i varje horisontalrad tillsammans, och torde deras inbördes sammanhang ganska lätt inses, om man beaktar formlerna (9) och (10).

Fyra fall äro nämligen möjliga, beroende på de *ursprungliga* tecknen hos kvantiteterna C och $A - B$. Alltså:

2α	$\operatorname{tg} 2\alpha =$	$C:(A-B)$		$(A-B)\cdot\cos 2\alpha + C\cdot\sin 2\alpha =$			$A'-B'$
I kvadr.	+	+	+	+	+	+	+	$\therefore +$
I »	+	−	−	−	+	−	+	$\therefore -$
IV »	−	+	−	−	+	+	−	$\therefore -$
IV »	−	−	+	+	+	−	−	$\therefore +$

Närmare förklaring. När 2α ligger i I:a kvadranten, så blir $\operatorname{tg} 2\alpha$ *positiv;* om då C är *positiv*, så måste $A-B$ bli *positiv* enligt (9). Vidare är $\cos 2\alpha$ alltid *positiv* uti I:a kvadranten liksom $\sin 2\alpha$. På grund härav blir *alltså* enligt (10) även $A'-B'$ *positiv*. Detta gäller för första horisontalraden och på alldeles analogt sätt för de *tre* återstående horisontalraderna. Av schemat framgår nu, att $A'-B'$ alltid får samma tecken som $A-B$, därest 2α väljes uti *första* eller *fjärde* kvadranten. *V. S. B.*

Anm. 1. Väljes däremot enkelvinkeln α apriori såsom en *positiv spetsig vinkel,* så kan dubbelvinkeln 2α råka att komma uti *andra* kvadranten, och då gäller tydligen *icke* satsen ovan *generellt.*

Anm. 2. Väljes *dubbelvinkeln* 2α, såsom *vi* gjort, uti första eller fjärde kvadranten, så innebär detta tydligen, att *enkelvinkeln* α valts apriori t ex. såsom en *spetsig vinkel med gränserna* $-45°$ *och* $+45°$, och gäller då satsen fullt generellt, emedan i så fall dubbelvinkeln 2α alltid kommer i första eller fjärde kvadranten.

Anm. 3. Naturligtvis kan enkelvinkeln α också apriori väljas med gränserna $0°$ och $+45°$ samt gränserna $+135°$ och $+180°$, ty även i så fall kommer dubbelvinkeln 2α att falla uti första eller fjärde kvadranten. Man skulle i så fall aldrig *behöva*, för att bortskaffa en xy-term, vrida axlarna t. ex. $60°$; d. v. s. hela området från $45°$ till $135°$ kan, så när som på gränserna, utan vidare *negligeras.* Vilket inses, som sagt, enligt formeln (9), såsom *vi* här utnyttjat densamma, men vilket ock omedelbart utan vidare

inses därav, att OX_1-axelns eventuella 60-graders-läge (i förhållande till OX-axeln) tydligen, utan inverkan på *existensen* av xy-termen, kan ersättas med ett läge av $60° + 90° = 150°$, fallande alltså inom området 135° till 180°. Det är ju så, att det negligerade området 45° till 135° har *gränser*, som bilda just 90° (liksom koordinataxlarna) med varandra.

§ 3.

Återstår nu att uppställa en enkel och praktisk minnesregel för *transformationsformlerna* (2) och (3)

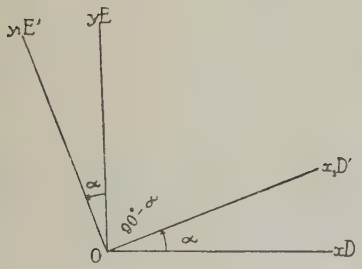
$$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

samt likaså framför allt för *koefficientformlerna* (7) och (8)

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$E' = -D \sin \alpha + E \cos \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$



	x_1D'	y_1E'
xD	α	$90° + \alpha$
yE	$90° - \alpha$	α

Fördenskull har man endast att jämföra närstående axelfigur och vinkelschema med varandra. I varje ruta inskrives med ledning av figuren *utan tanke på några projektionsvinklar eller projektionsaxlar* helt enkelt vinkeln mellan de tvenne koordinataxlar, till vilka rutan hör, varvid man låter x- och y-axlarna vara på samma gång D- och E-axlar resp., samt x_1- och y_1-axlarna likaså vara även D'- och E'-axlar resp. Mot xD (d. v. s. mot x och D) svarar då *horisontalraden* med vinklarna α och $90° + \alpha$; mot x_1D' (d. v. s. mot x_1 och D') svarar likaså *vertikalraden* med

vinklarna α och $90° - \alpha$, o. s. v. *Användande sig endast av* ***cosinus****funktioner samt* ***plus****tecken dem emellan, nedskriver man sedan direkt enligt schemat följande likheter:*

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos (90° + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a)$$

$$y = x_1 \cos (90° - \alpha) + y_1 \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a)$$

vilka formler just äro (2) och (3).

På alldeles samma sätt nedskriver man även *direkt med ledning av samma schema likheterna:*

$$D' = D \cos \alpha + E \cos (90° - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,a)$$

$$E' = D \cos (90° + \alpha) + E \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\,a)$$

vilka formler just äro (7) och (8).

Anm. 1. Samma schema ger också direkt utan vidare formlerna för x_1 och y_1, nämligen:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \cos (90° - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$y_1 = x \cos (90° + \alpha) + y \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

eller [jfr (7) och (8)]

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a)$$

$$y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,a)$$

varvid man således slipper all projiciering eller elimination

Anm. 2. Samma sorts schema kan även användas vid transformationer inom den analytiska *rymdgeometrien*, varom man lätt kan övertyga sig.

Om möjligheten av en kall kärna i jordens inre.[1]

Av CONRAD LÖNNQVIST.

I föregående årgång av denna tidskrift, häft. 1, har lektor Tage Koræn i en uppsats »Seismologiens mål och medel» klart och koncist refererat seismologiens senaste resultat angående jordklotets konstitution. Jordbävningsvågornas fortplantning visa enligt Wiecherts beräkningar, att ifråga om tillståndet i jordklotets inre en tämligen skarp gräns går på ett djup av något mer än $^1/_5$ av jordradien. Därutanför finnes ett mera plastiskt skikt av lägre sp. vikt. Men innanför måste jordklotet utgöras av en kärna med utomordentlig hårdhet och en sp. vikt, som något överstiger järnets. Den beräknade hårdheten förhindrar, att kärnans högre sp. vikt avsevärt tillskrives tryckets verkan. I stället måste den bero av kärnans natur. Denna kan rentav antagas vara en verklig järnkärna eller bestå åtminstone huvudsakligen av järn.

Inför dessa seismologiska fakta kan man — som undertecknad gjort — ställa sig frågan: Måste denna järnkärna tänkas glödhet, som vanligen antages, även av Wiechert? Eller kan den icke möjligen ha en relativt låg temperatur, såsom vissa äldre forskare trott? Och skulle icke i sistnämnda fall denna järnkärna på ett uppenbart sätt kunna stå i samband med jordmagnetismen?[2]

[1] Uppsatsen utgör ett referat av en författarens avhandling: »Måste jordens kärna antagas vara av hög temperatur», som är under tryckning i K. Vetenskapsakademiens Arkiv för matematik, astronomi och fysik. — Uppslaget till densamma erhöll förf. genom denna tidskrift, vilket med tacksamhet erkännes.

[2] Järnet förlorar som bekant vid 700° C. sina magnetiska egenskaper.

Svårigheten i att anta järnkärnan kall ligger naturligtvis däri, att man under jordskorpan torde böra räkna med ett glödande skikt, som med hänsyn till Wiecherts resultat synes kunna nå från skorpans nedre gräns på 50 à 100 km. djup ned till 1 500 km. djup.

Kan man nu blott på någon grund anta, att jordklotet en gång varit fullständigt avkylt och sedan omgivits av ett glödande skikt, så blir det hela uppenbarligen ett värmeledningsproblem. Då blir frågan, hur långa tidrymder skola krävas för en avsevärd utjämning i temperatur mellan skiktet och kärnan. Därav beror, om stationärt tillstånd nu bör ha inträtt. I själva verket har man tidigare apriori förutsatt ett stationärt tillstånd. Men detta aprioriska antagande är som alla dylika oberättigat. Man har överskattat värmets framträngningsförmåga. Det måste nämligen, som beräkningarna synas visa, åtgå 1 000-tal millioner år för en nämnvärd utjämning mellan skiktet och kärnan. Och av större storleksordning kan näppeligen den tid vara, som förflutit sedan skiktets bildande.

Men hur skall man i så fall tänka sig skiktet bildat? Detta är en kosmogonisk fråga. De uppflammande stjärnorna vittna om kalla himlakroppars invandrande i nebulosor med den effekt, att de glödgas upp till lysande solar. Detsamma skulle väl kunna ha hänt vårt jordklot. Vår jord kan på sin vandring genom rymden först ha hunnit bli fullkomligt avkyld och sedan råkat in i den nebulosa, varur vårt solsystem bildats, därvid glödgats upp och samlat omkring sig ett skikt av nebulosamateria, vilket nu (tillsammans med en del av det på ytan smälta ursprungliga jordklotet) bildar det glödflytande skiktet under jordskorpan. Denna har naturligtvis bildats senare genom det glödande omhöljets avsvalning på ytan. Under de långa tidrymderna för skiktets uppkomst och dess senare avsvalning med skorpans bildande har värme alltjämt strömmat in i jordens kärna. Men som mina räkningar på basis av den allmänna värmeledningsekvationen visa, har denna värmeledning på 1 000-tal millioner år icke haft

avsevärd effekt på åtminstone de centralare partiernas temperatur.

Sådan är i få ord den tes, jag sökt uppställa. Blott ett tillägg. I stället för att tänka sig jorden invandrad enstaka i den nebulosa, varur vårt solsystem framgått, kan man något variera hypotesen: Hela vårt solsystem i ungefär nuvarande gestalt kan på sin färd genom rymden — kanske med släckta lanternor — ha rusat in i en nebulosa och därvid glödgats upp på nytt för att gå en ny livsperiod till mötes.

Innan jag går över till ett referat av de räkningar, som synas bestyrka möjligheten av den uppställda tesen, kan en historik[1] vara på sin plats.

Redan *Plato* antager ett flytande tillstånd i jordens inre, Tartarus, varifrån lavaströmmarna flyta. Kyrkofäderna hade ju vissa skäl att omfatta samma lära för att närmare kunna lokalisera de fördömdas boning. Denna tanke behärskade också hela medeltiden.

En förklaring till jordens antagna glödande inre gav först *Descartes* (1644), som uttalade åsikten, att jordklotet ursprungligen varit av samma natur som stjärnorna och solen men sedan avkylts och stelnat på ytan. Han synes sålunda ha varit förste upphovsmannen till den gängse nutida uppfattningen. Denna har dock sina rötter närmast i *Kant-Laplaces* bekanta *nebulosahypotes.*

Ett bevis för jordklotets ursprungligen glödflytande tillstånd gav *Newton* genom att peka på jordens avplattning.

Några undersökningar av temperaturens förändring mot djupet att stödja sig på fick man först på 1820-talet med *Cordiers* och senare forskares mätningar.

År 1822 utgav *Fourier* sitt för den matematiska värmeledningsteorien grundläggande arbete. Han behandlade även konkreta värmeledningsproblem rörande jordklotet,

[1] För en fullständigare historik hänvisas till *H. Thiene*, Temperatur u. Zustand des Erdinnern, Jena 1907.

särskilt då beträffande inträngandet ned i jorden av årets och dygnets temperaturväxlingar vid jordytan. Han hade även gjort försök för att praktiskt pröva de teoretiska beräkningarna. Dessa växlingar befunnos nedtränga resp. 60 m. och 3 m. Därnedanför syntes temperaturen tilltaga med djupet. Detta värme förklarade Fourier som en återstod av det en gång från solnebulosan erhållna värmet. Som följd av denna temperaturstegring nedåt ledes ständigt värme utåt, och jordklotet är sålunda statt i avsvalning.

Genom senare mätningar har man trots mångahanda svårigheter kunnat konstatera storleken av temperaturens tillväxt nedåt eller, mera precis, hur stor förflyttning nedåt fordras för 1° C. temperaturförhöjning, den s. k. jordtemperaturgradienten, som nu torde kunna skattas till 30 à 35 m., vilket gör omkr. 30° tillväxt på 1 km.

Som följd härav beräknade man jordskorpans tjocklek till c:a 50 km. Och med antagande av temperaturgradientens oföränderlighet kom man för jordens centrum till en temperatur om 100 à 200 tusen grader.

En reaktion mot antagandet av sådana höga temperaturer i jordens inre började redan med *Poisson*, som (1835) byggde vidare på Fouriers matematiska värmeledningsteori. Poisson kunde icke gilla, att fysiker och geologer handskades med temperaturer så höga, att de trotsa varje uppfattning. Vid 100 000° måste f. ö. jordens inre vara i gasform och likväl så sammanpressat att sp. vikten är mer än 5. Ett sådant tryck skulle jordskorpan icke kunna uthärda. Man måste söka en annan förklaring till temperaturens faktiska tilltagande mot djupet. Av jordens avplattning sluter även han till att jorden en gång varit glödflytande. Genom avkylning har den sedermera stelnat *helt och hållet*. Och denna stelning har *icke* skett först *på ytan* och sedan inåt *utan* tvärtom *från centrum och utåt*. Denna nya idé grundar han på det förhållandet, att åtminstone flertalet ämnen krympa vid stelning och därigenom bli sp. tyngre. Dessutom underlättas för sådana ämnen som bekant stelnandet genom starkt tryck. Därför

samlas de avkylda stelnade massorna i klotets mitt, sammanpressas där till en fast massa, som tillväxer utåt. Till slut har hela jordklotet blivit fullkomligt stelnat. Och icke nog med det, det har sedan genom ledning utåt förlorat allt sitt värme. Men hur förklarar Poisson då värmegradens faktiska tilltagande nedåt? Jo, jorden och solsystemet passerade sedan genom en trakt av rymden, som — på grund av starkare strålning från omgivande solar — varit av högre temperatur än den oss nu omgivande. Då uppvärmdes det avkylda jordklotet utifrån och inåt. Sedermera kom solsystemet åter till kallare regioner, och därmed efterträddes uppvärmningen av avkylning utåt. Som följd därav tilltager numera värmegraden inåt, men därför behöver man icke antaga någon särdeles hög temperatur i jordens inre.

Emellertid har Poissons antagande av olika temperaturer i världsrymdens olika regioner, vilken tanke f. ö. även Fourier hade, visat sig oriktig I den *tomma* världsrymden råder överallt samma temperatur, den abs. nollpunkten.

Den sida av Poissons teori, som sedermera mest diskuterats ända fram till vår tid, är däremot sättet för ett glödflytande klots avsvalning och stelning.

Lamont, en banbrytare för jordmagnetismen som vetenskap, godtog Poissons teori. Lamont tänkte sig nämligen jorden i det inre kompakt och metallisk, till väsentlig del bestående av järn eller genomdragen av järnådror. Därmed kunde han förklara jordmagnetismen såsom beroende av det fasta jordklotets järnhaltiga inre.

Särskilt ha engelska forskare förfäktat Poissons uppfattning om jordens stelnande. Men i övrigt har man strukit hans teori om jordklotets förnyade uppvärmning utifrån. I stället befinner sig jordklotet nu i avkylning efter fullbordat stelnande. Här är främst att nämna *W. Thomson (Lord Kelvin)*. Denne har (1863) gjort en mycket berömd beräkning av jordens ålder utgående just ifrån nämnda uppfattning. Med användning av Fouriers värmelednings-

ekvation beräknar han, att efter jordklotets fullständiga stelnande skall den nuvarande temperaturgradienten till följd av avkylningen utåt ha uppnåtts efter 100 millioner år. Detta tidsvärde, som naturligtvis beror av de mycket osäkra uppskattningarna av begynnelsetemperatur och ledningsförmåga, har han sedan modifierat nedåt, ända till 10 mill. år.

Orsaken till att engelska forskare ända fram till våra dagar omfattat åsikten om ett fast jordinre, är att söka på ett annat område. Lord Kelvin utgick ifrån att jordens fasthet skulle kunna påvisas på annan väg, nämligen genom den påverkan jorden lider genom närbelägna himlakroppar. Som bekant orsakar månen och delvis solen flodfenomenet. Men om jorden vore flytande med en tunn skorpa, skulle även denna vara underkastad samma höjning och sänkning som världshaven. Följden skulle bli, att ingen ebb och flod skulle kunna märkas. Även övriga rubbningar, som framkallas av sol och måne, precession och nutation, skulle visa sig olika, om jorden är fast eller om den har en skorpa simmande på ett flytande inre. Undersökningar av Lord Kelvin och *G. H. Darwin* visade nu, att med hänsyn till dessa fenomen måste jordklotet i sin helhet antagas vara minst så hårt som stål. — Och sedan gällde det endast att förklara, hur jordklotet kan ha fått denna egenskap, som man ansåg endast förenlig med ett alltigenom fast jordklot.

Vid sidan av dessa teorier, som i allmänhet utgått från Laplaces nebulosahypotes, började en annan uppfattning göra sig gällande. Det är *meteorhypotesen*, särskilt företrädd av *A. E. Nordenskiöld*[1] och *Lockyer*. Enligt Nordenskiöld är jorden bildad ur en nebulosa av meteoriskt stoft och har alltjämt varit stadd i en stadig tillväxt genom nedfallande meteorer, vilken process, ehuru i långsammare tempo, ännu fortsätter. Nordenskiöld antar därför, liksom tidigare Lamont, att jordens inre i stort sett är en kall järnmassa av meteoriskt järn.

[1] Se härom *A. E. Nordenskiöld*, Studier och forskningar, Sthlm 1883.

Denna meteorhypotes har sedan blivit vidare utformad och modifierad av de båda amerikanska astronomerna *Moulton* och *Chamberlin*, som anta planeternas bildning ur fint fördelat meteorstoft (planetesimals). Men denna s. k. *planetesimalhypotes* har icke lett till antagandet av en kall jordkärna. Tvärtom skulle under klotets tillväxt temperaturen ha stigit i dess inre genom hoppressningen. Temperaturen i jordens inre skattas enligt denna hypotes till något 10 000-tal grader. Denna hypotes har dock endast i Amerika vunnit större anslutning.

Från både denna hypotes och den ursprungliga nebularhypotesen är sålunda jordens inre av hög temperatur. För övrigt har Lord Kelvins ståndpunkt numera av de flesta övergivits, särskilt sedan *Tammans* undersökningar gjort troligt, att alla ämnen vid tillräckligt tryck nå ett smältpunktsmaximum. Resultatet av Lord Kelvins beräkning av jordens ålder är även ur geologisk synpunkt alldeles för lågt. Och så återstod endast att vidbliva tanken om en jämförelsevis tunn skorpa med en inre icke fast massa av oerhört hög temperatur, trots svårigheten att därmed förklara jordklotets styvhet mot yttre påverkningar. Efter införandet i fysiken av begreppet kritisk temperatur, måste man t. o. m. tänka sig jordens innersta i gasformigt tillstånd, så att jorden inifrån och utåt skulle uppvisa en kontinuerlig serie av aggregationstillstånd. Gasmassan i jordens inre skulle dock vara så hoppressad, att den — huvudsakligen bestående av järngas — skulle likna i mycket en fast massa. Till denna ståndpunkt ansluter sig Svante Arrhenius (dock med modifikation i senaste skrifter).

Men så kommo från och med sekelskiftet *Wiecherts* beräkningar med seismologiens hjälp. Och därmed tillförsäkrades åtminstone en väsentlig del av jordklotet ett fast aggregationstillstånd och därtill en hårdhet 4 gånger stålets. Trots detta antar Wiechert, att järnkärnan är het. Ja, temperaturen kan enligt honom t. o. m. ligga över den kritiska temperaturen, då försök av ovannämnde Tamman på sista tiden visat, att kristalliniskt fast tillstånd i vissa

fall är möjligt även över den kritiska temperaturen vid oerhörda tryck. Wiechert lär uppskatta temperaturen till c:a 3 000° C., på vilka grunder har jag dock icke funnit.

Emellertid har beträffande jordklotets uppkomst *S. Arrhenius* sökt i viss mån förmedla den gamla nebularhypotesen med Moultons och Chamberlins hypotes. I den spiralnebulosa, bildad genom tvenne solars sammanstötning, varur vårt solsystem danats, har *kondensationshärdarna* utgjorts av *utifrån invandrade massor*, meteorsvärmar eller *kosmiskt stoft*. Ur dessa kondensationscentra ha planeterna framgått i sitt alltigenom glödande tillstånd.

Men varför skulle icke *invandrade klot* av *planetariska dimensioner* lika väl ha kunnat utgöra kondensationscentra, som efter uppglödgning på ytan och tillväxt blivit till de nuvarande planeterna? Skulle icke detta lämpligen kunna *förklara jordklotets nuvarande inre fasthet* och hårdhet, om nämligen det invandrade klotet var fullständigt avkylt och stelnat?

Mitt förklaringsförsök lämnar sålunda frågan öppen, hur jordklotet från början har bildats, vare sig av meteorer eller genom förtätning av nebulosamateria, och i sistnämnda fallet huruvida det stelnat inifrån eller utifrån. Den frågan har bara den betydelsen, att t. ex. med Poissons avkylningsteori bleve avkylningsprocessen för ett glödande klot hastigare än annars, varför förekomsten av helt avkylda klot i rymden i så fall kan antagas vara allmännare.

Mitt försök är för övrigt i viss mån en gengångare till Poissons teori om jordklotets uppvärmning utifrån, dock med en betydande skillnad. Jordklotet har irrat fram genom trakter i rymden av än högre, än lägre temperatur — enligt Poisson — riktigare genom än tomma rymder, än av nebulosamateria fyllda. Det glödande skiktet under skorpan är ett minne från sist genomplöjda nebulosa.

Beräkningarna grunda sig på Fouriers värmeledningsekvation för ett klot. Denna ekvation gäller för ett homogent klot av överallt samma värmeledningsförmåga (K), täthet (d) och sp. värme (c), och där temperaturen är lika

på samma avstånd från centrum, så att temperaturen (v) endast beror av detta avstånd (x) och tiden (t). Om man då ställer upp villkoret för att skillnaden mellan den värmemängd, som går in genom ena gränsytan ($r = x$) av ett koncentriskt skikt (med tjocklek dx), och den värmemängd, som samtidigt går ut genom dess andra gränsyta ($r = x + dx$), är lika med den värmemängd, som förbrukats för höjande av skiktets temperatur (dv), så kommer man till differentialekvationen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{cd} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Denna har nu en intergral av formen

$$v = e^{-\frac{K}{cd} \cdot n^2 t} \cdot a \cdot \frac{\sin nx}{x}$$

där konstanterna a och n bestämmas dels av temperaturens fördelning i begynnelsen, dels av temperaturförhållandena vid klotets begränsningsyta, vars radie i det följande sättes $= X$.

Om man nu väljer dessa konstanter så att man sätter

$$v = e^{-\frac{K}{cd} \cdot \left(\frac{\pi}{X}\right)^2 \cdot t} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{X}}{\frac{\pi x}{X}} \cdot v_0$$

finner man lätt, att denna lösning gäller för det fall, att temperaturen i begynnelsen ($t = 0$) har följt kurvan

$$v = \frac{\sin \frac{\pi x}{X}}{\frac{\pi x}{X}} \cdot v_0$$

vars förlopp fig. 1 visar, varvid klotytans temperatur ($x = X$) hela tiden varit $= 0$. — Detta har kallats harmonisk temperaturfördelning.

För ett sådant begynnelsetillstånd visar lösningen, att temperaturerna (ordinatorna) överallt i klotet faller i samma

proportion, vilken proportion är en exponentialfunktion av tiden. Nu kan man sålunda lätt beräkna, vilken tid som fordras för en viss nedsättning av temperaturen.

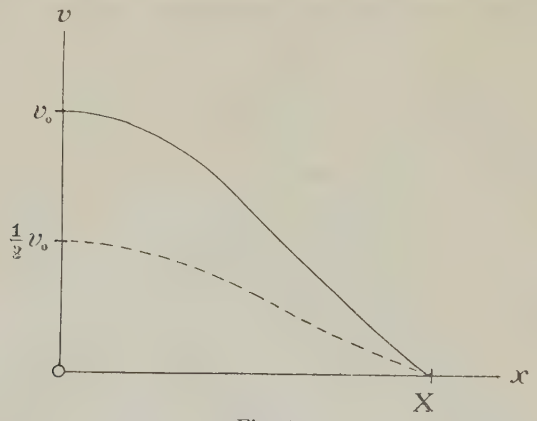


Fig. 1.

Men vi vilja nu i stället antaga, att ytans temperatur hållits konstant = v_0, och att temperaturen från början fallit in mot centrum längs en liknande kurva i omvänd ordning (fig. 2). Då kan man utan vidare skriva lösningen

$$v = v_0 - e^{-\frac{K}{cd}\cdot\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 \cdot t} \cdot \frac{\sin\frac{\pi x}{X}}{\frac{\pi x}{X}} \cdot v_0 .$$

Denna lösning, som visserligen icke motsvarar vårt kosmogoniska problem, tillåter dock en överslagsberäkning. Man kan ju t. ex. beräkna, vilken tid i detta fall kräves för att medelpunktens temperatur skall höjas från 0 till $\frac{1}{2} \cdot v_0$, varvid temperaturen överallt utjämnas i samma proportion (den övre kurvan i fig. 2). Det gäller då endast att lösa ekvationen

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{K}{cd}\cdot\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 \cdot t}$$

eller

$$\frac{K}{cd}\cdot\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 t = \log 2 .$$

Om klotet är av järn, så är approximativt $K = 0{,}16$, $d = 8$, $c = 0{,}12$ och kvoten $\frac{K}{cd}$, som vi beteckna k, blir $= \frac{1}{6}$.

Låt oss först göra beräkningen för ett järnklot med radien $= \pi$ cm. $= 3{,}14$ cm. Då fås $t = 6 \cdot \log 2 = 4{,}1$. För ett sådant järnklot, som vid ytan uppvärmes till konstant 1 000°, och vars temperatur från början varit fallande

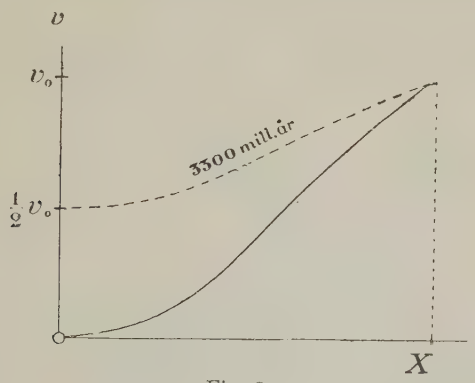


Fig. 2.

inåt enligt fig. 2, tar det alltså 4,1 sekunder, innan medelpunktens temperatur höjts till 500°. Detta resultat visar, att värmet icke ens i ett klot av järn ledes så ögonblickligt, som man är böjd att tro.

Gå vi nu till jordklotet och göra samma beräkning för dess vid ytan upphettade järnkärna med radien X, så skall den nyss beräknade tiden 4,1 sek. förstoras i proportionen $X^2 : \pi^2$. Om X enligt Wiechert sättes $= 5\,000$ km. $=$ $= 5 \cdot 10^8$ cm., så finner man, att tiden för jordens järnkärna blir

$$t = 3\,300 \text{ millioner år.}$$

I vårt kosmogoniska problem gäller det emellertid ett klot, som från början var fullständigt avkylt och sedan uppvärmdes genom upphettning vid ytan, vars temperatur därunder kan tänkas konstant. I detta fall låter sig inte-

gralen till Fouriers ekvation icke uttrycka med en enda term utan med en hel serie:

$$v = \sum_p' e^{-kn_p^2 t} \cdot a_p \cdot \frac{\sin n_p x}{x}$$

där konstanterna n_p och a_p skola så bestämmas, att för $t=0$ begynnelsetemperaturen är $=0$ för $0<x<X$ men $=v_0$ för $x=X$, och att för detta senare x-värde temperaturen är konstant $=v_0$ oberoende av tiden.

Man kan emellertid på en genväg komma till lösningen. Därvid skola vi för enkelhets skull sätta radien $X=\pi$ och välja ytans temperatur som enhet d. v. s. sätta $v_0=1$.

En funktion $y=x$ kan inom intervallet $0<x<\pi$ utvecklas i en Fouriers serie

$$y = 2 \cdot (\sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x - + \ldots)$$

som för $x=\pi$ har en diskontinuitet från $y=\pi$ till $y=0$.

Alltså kan en funktion $z=1$ för $0<x<\pi$ men med värdet $z=0$ för $x=\pi$ utvecklas i serien

$$z = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 3x}{3x} - + \ldots \right).$$

Slutligen följer därav, att den funktion $v_{t=0}$ som representerar temperaturens begynnelsefördelning i klotet och sålunda $=0$ för $0<x<\pi$ men $=1$ för $x=\pi$ kan uttryckas med serien

$$v_{t=0} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 3x}{3x} - + \ldots \right).$$

Därav kan man intuitivt sluta, att lösningen av värmeledningsproblemet för detta fall blir:

$$v = 1 - 2 \cdot \left[e^{-kt} \cdot \frac{\sin x}{x} - e^{-4kt} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + e^{-9kt} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} - + \ldots \right]$$

vilket resultat kan bekräftas genom konstanternas bestämning på övligt sätt.

Efter tillräckligt lång tid blir parentesens första term dominerande. Temperaturfördelningen närmar sig sålunda med tiden till att bli harmonisk utan att på ändlig tid nå därhän. Fig. 3 åskådliggör fördelningen vid två skilda tidpunkter.

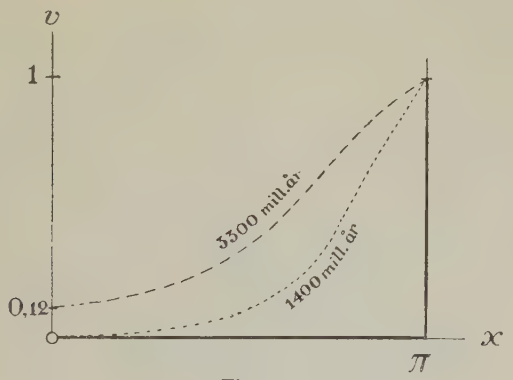


Fig. 3.

Vid beräkningen härav får man tydligen ett särskilt enkelt uttryck för medelpunktens temperatur, nämligen

$$v_{x=0} = 1 - 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} e^{-kp^2 t} \cdot (-1)^{p-1}.$$

Välja vi speciellt den tidpunkt, som i vårt första problem gjorde

$$e^{-kt} = \frac{1}{2}$$

och som för radien $= \pi$ cm. motsvarade $t = 4{,}1$ sek men för radien = jordklotets järnkärnas motsvarar

$$t = 3\,300 \text{ millioner år},$$

så erhålles för medelpunktens temperatur serien

$$v = 1 - 2 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} - + \ \ldots \right]$$

som ger värdet $\boldsymbol{v = 0{,}12}$.

Efter 3 300 millioner år har således temperaturen i järnkärnan endast stigit till 0,12 av det omgivande glödande skiktets. Om detta under hela denna tid hållits vid tem-

peraturen 3 000°, så har ändock medelpunktens temperatur endast höjts till 360°, d. v. s. c:a $+90°$ C.

Fig. 3 visar nu temperaturfördelningen dels för den nämnda tiden, dels för $t = 1\,400$ millioner år, den prickade kurvan (motsvarande $e^{-kt} = \frac{3}{4}$).

Ytterligare kan man nu undersöka det fall, då det avkylda klotet uppvärmes av ett glödande skikt, vars temperatur sjunker tack vare värmeledningen inåt. Värmeförlusten utåt försummas t. v. Därvid kan man för enkelhets skull *antingen* tänka sig skiktet fast och med samma konstanter (K, c och d) som den kalla kärnan *eller* också att skiktet är flytande, så att dess temperatur sjunker samtidigt i hela massan. Mellan dessa ytterligheter borde verkligheten ligga. Räkningarna för dessa båda fall återges icke här. Men fig. 4 åskådliggör *det förra* under antagande att, såsom enligt Wiechert, skiktets volym är ungefär lika med kärnans volym, d. v. s. att skiktets yttre och inre radier förhålla sig som $\sqrt[3]{2} : 1$. Fig. 4 visar då utom det ursprungliga temperaturtillståndet (den brutna linjen) även temperaturen efter 3 500 millioner år (den streckade linjen) och efter hälften så lång tid (den prickade kurvan).

I *senare fallet* uppnås ungefär samma sluttillstånd efter 2 300 millioner år som i fig. 4 efter 3 500 millioner år med skiktets temperatur sänkt till 0,6.

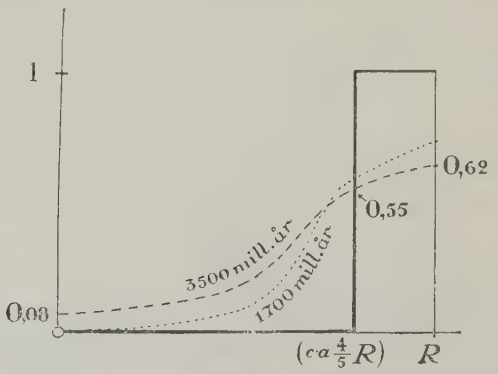


Fig. 4.

Har således skiktet från början haft temperaturen 3 000°, så har denna temperatur nedgått till 1 800°, medan temperaturen i centrum stigit till 300°, d. v. s. ungefär 30° C.

Vilka tidrymder bör nu jordklotets här hypotetiserade utvecklingshistoria ha betingat, och vilka värmegrader böra därunder antagas ha varit rådande vid jordens yta? Därav beror givetvis räkneresultatens tillämplighet och teoriens möjlighet.

Man kan här tänka sig tre skeden: 1:o) ackumuleringsskedet, då nebulosamaterien hopades på jordklotet, 2:o) kondensationsskedet, då efter ackumuleringens upphörande det hopade gashöljet kondenserades på kärnan, 3:o) avkylningsskedet med skorpans bildande och fram till vår tid.

Om ackumuleringsskedets längd kan man få en uppfattning genom en beräkning av A. Ritter över den tid, som vår solnebulosa skulle ha behövt för att sammandra sig från Neptunusbanan och till dess en sol bildades med maximistrålning. Ritter uppskattar denna tid till omkring 16 millioner år. Han räknar därvid naturligtvis icke med invandrade kondensationskärnor som rensare i nebulosan. Och vidare tar han icke hänsyn till att den genom kontraktion frigjorda värmeenergien delvis bundits genom kemiska föreningars bildande vid den stigande temperaturen. Därför kan Ritters uppskattning icke vara för låg, snarare för hög. Nebulosans förvandling till ett solsystem har således icke krävt så svindlande tidrymder.

Men vilken temperatur har det invandrade jordklotets yta upphettats till härunder genom sammanstötning med och ackumulering av nebulosamateria? Ja, därvid kan man grunda sin uppskattning på en beräkning gjord av Arrhenius i Människan inför världsgåtan, sid 109 (5:e uppl.). Han vill där uppvisa, hur liten effekt det skulle ha på vår sols strålning, om hon råkade in i en nebulosa. Som speciellt exempel väljes en nebulosa av den täthet, som skulle erhållas, om vårt solsystems massa vore jämnt utbredd i en sfäroid nående Neptunusbanan och med en

medeltjocklek = 10 gånger solens nuvarande diameter. Han finner då med en antagen relativ hastighet hos den invandrande solen av 28,3 $^{km.}/_{sek.}$, att solen per år skulle genomlöpa en nebulosamassa utgörande 0 000002 av dess egen massa, och att dess hastighet därför skulle minska i denna proportion. Om den förlorade energin omsättes i värme, finner han, att därmed årligen skulle tillföras solen en värmemängd motsvarande 10 procent av solens normala utstrålning. Solen skulle därför endast behöva öka sin utstrålning med 10 %, så vore värmetillförseln kompenserad. Och denna kvantitet skulle vara nästan omärklig.

Precis samma beräkning kan man nu göra för ett i en likadan nebulosa inrusande jordklot. Jorden skulle naturligtvis häftigt glödgas upp på ytan genom stöten med nebulosapartiklarna, men snart skulle den genom uppglödgningen orsakade strålningen jämnt motväga stötvärmet. Detta jämviktstillstånd skall i själva verket även för jorden vara uppnått, då dess strålningsintensitet stigit från 0 till 10 procent av solens nuvarande strålningsintensitet. Men en strålningsintensitet lika med 0,1 av solens förutsätter enligt Stefans lag en temperatur något högre än 0,5 av solens. Jordklotet skulle sålunda endast glödgas upp till c:a 3 500° C.

En upphettning till omkring 3 000° under det första skedets 10-tal millioner år måste, enligt räkningarna till fig. 3, medföra endast ytterst obetydlig effekt på temperaturen i kärnans inre.

Det andra skedets längd är svårare att uppskatta. Man kan emellertid försöksvis utgå ifrån att det genom gashöljets kondensation frigjorda värmet kommit kärnan till godo. Då beror det på, med hur stor massa man skall tänka sig att det invandrade jordklotet tillväxt. Hela det nu — enligt Wiecherts resultat — glödflytande skiktet kan icke härröra från ackumuleringen. Ty en stor del av det ursprungliga jordklotet blev naturligtvis under första och andra skedet upphettat till smältning. Om man antar, att jordradien ökats med 5 procent, så kan man tänka sig, att varje gram av den anhopade massan vid kondenseringen

alstrat en värmemängd av 3 500 gramkalorier, som helt och hållet kommit jordens inre till del, utan att därför kärnans medeltemperatur därigenom enligt beräkning blivit höjd till mer än c:a $^1/_2$ av det glödande skiktets temperatur. Även om man i kondensationsvärmet medräknar det värme, som frigjorts vid samtidigt bildande av kemiska föreningar i smältan, bör man knappast kunna anta ett högre kondensationsvärme.

Då vid första skedets slut kärnan alltjämt bibehållit sin ytterst låga temperatur (utom närmast ytan), så är även för andra skedet de fig. 3 tillhörande räkningarna alltfort approximativt tillämpliga. Genom integrering kan man nu lätt beräkna, att för den övre kurvan klotets medeltemperatur är 0,69 av ytans, och att för den undre kurvan den är 0,48. Temperaturfördelningen vid andra skedets slut skulle därför enligt nyss gjorda antagande närmast ansluta sig till den undre kurvan. Och den däremot svarande tidrymden är som förut nämnt 1 400 millioner år.

För säkerhets skull må understrykas, att alla värmeledningsräkningar äro gjorda med användning av *järnets* ledningsförmåga. Men det invandrade klotet torde väl till sina yttre delar ha bestått av helt andra ämnen än järn med betydligt, 10 à 100 gånger, mindre ledningsförmåga. — Slutsatsen blir, att under skedena 1. och 2. har icke någon större effekt uppnåtts i fråga om uppvärmning av åtminstone klotets innersta.

Sedan gashöljet till största delen kondenserats, dröjde det icke länge, förrän en skorpa bildades, och då äro vi inne i det tredje skedet.[1] Tack vare skorpan blev snart värmeförlusten utåt så obetydlig, att vi t. v. kunna bortse från den, och då äro räkningarna till fig. 4 tillnärmelsevis tillämpliga.

För jordskorpans ålder ha nu otaliga beräkningar gjorts från många olika utgångspunkter. De vederhäftigare beräkningarna torde icke överstiga 2 000 millioner år. Då visar fig. 4, att för en sådan tid temperaturen i centrum knappast höjts till 0,1 av skiktets ursprungliga. Nu hade visserligen redan förut en del värme inträngt och något

[1] Vi utgå då från den vanliga uppfattningen, att stelnandet sker utifrån

litet höjt temperaturen även i det inre. Men å andra sidan har värme även letts utåt genom skorpan. Detta har påskyndat skiktets avkylning och därmed fördröjt värmeledningen inåt. Om skiktets ursprungliga temperatur i detta skede varit c:a 2 500°, så torde man icke behöva anta, att medelpunktens temperatur allt som allt höjts till mer än 250°, d. v. s. omkring 0° C.

Ovannämnda värde på jordskorpans ålder, 2 000 mill. år, uppgives av Arrhenius enligt en beräkningsmetod av N. Ekholm. Denne har utgått från jordytans genom bergskedjebildningen ådagalagda skrumpning, vilken anses ge vid handen en minskning av jordradien av 0,8 %, sedan skorpans första tid (riktigare sedan kambrisk tid).[1] Om denna skrumpning tillskrives jordklotets avkylning, kan man beräkna en sänkning av jordens medeltemperatur om 300°. För en sådan temperatursänkning till följd av värmets ledning utåt genom skorpan fordras med kännedom om temperaturgradienten enligt Ekholm 2 000 millioner år.

Men hur går det med jordklotets volymförändring enligt här refererade teori, då järnkärnan genom uppvärmning utvidgar sig samtidigt som det glödande skiktet sammandrar sig? Jo, med tänkbara värden på utvidgningskoefficient och specifikt värme för skiktet och kärnan, erhålles verkligen en minskning av volymen som resultat. Man skulle t. o. m. kunna ut från den nya teorien göra en revidering av Ekholms beräkning av jordskorpans ålder med ett mindre värde som resultat. Men alla sådana uppskattningar bli av naturliga skäl mycket osäkra.

Då vid alla här refererade beräkningar de för ifrågavarande teori mest oförmånliga förutsättningar i allmänhet lagts till grund och likväl sådana resultat, som ovan visats, erhållas, skulle man vilja våga påståendet:

Det är icke omöjligt, att jordens inre kärna alltjämt är av låg temperatur.

[1] Radiens förkortning borde således vara åtskilligt större, särskilt som nyare undersökningar ge större värden för veckningarna. Men det är å andra sidan långt ifrån säkert, att bergskedjebildningen beror av och bevisar jordklotets sammandragning.

Om äldre och nyare kosmogonier.

Av **BENGT AURELL**.
Geodet vid Rikets allm. Kartverk.

Frågan om världsalltet, dess uppkomst och byggnad har i alla tider varit lockande för den mänskliga tanken. De äldsta av oss kända kosmogoniska föreställningarna vila, liksom de religiösa, med vilka de äro intimt förbundna, på mytisk grund, men redan från år 600 f. Kr. möter oss i Thales' åsikt om tingens grund och ursprung en världsförklaring, baserad på ren spekulation. Från denna tidpunkt, och under mer än ett årtusende framåt, uppstodo inom de talrika filosofiska skolorna olikartade kosmogoniska hypoteser, vilka dock alla, utom för filosofiens historia, sakna vetenskapligt värde. Med den antika bildningens undergång föllo emellertid dessa i en månghundraårig glömska, och medeltiden, fången i den mosaiska skapelsehistorien, har icke att uppvisa några spekulationer av detta slag, värda att nämnas. Först med Renässansen kan en ny tid för den astronomiska forskningen sägas hava upprunnit, men hur ogynnsam denna ännu under århundraden förblev, inses om man betänker, att Copernicus' skrift »De revolutionibus orbium caelestium», som år 1543 utkommit i Nürnberg, senare uppfördes på »index librorum prohibitorum» och först år 1757 avfördes därifrån. Det dröjde också till mitten av 1600-talet, innan några kosmogoniska hypoteser av betydenhet uppställdes. En sådan finna vi i Cartesius' år 1644 utkomna »Principia philosofia» och en annan i Leibnitz' »Protogæa» av år 1683, den senare ganska nära överensstämmande med vår tids såsom sannolik antagna. — Cartesius' kosmogoni, som

på sin tid tillvann sig många anhängare, modifierades sedan av Swedenborg, som i den år 1734 utkomna »Principia rerum naturalium etc.» framställde vårt solsystems nuvarande byggnad som frukten av en utvecklingsprocess. En liknande teori, men omfattande hela universums utveckling, framlades av Wright (1750) och utvecklades mer ingående av Kant, vilken ävenledes fullständigade densamma med sin mer detaljerade hypotes om vårt solsystems bildning (»Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels» 1755). En annan hypotes rörande solsystemet, sedermera vederlagd av Laplace, gavs av Buffon.

Den teori, nebularteorien, som i dagligt tal kallas Kant-Laplaces hypotes, och som ställt alla andra i skugga, offentliggjordes i form av en not, tillfogad i slutet av Laplaces år 1796 utkomna »Exposition du Système du Monde». Utan att ingå på frågan om med vad rätt Kants namn blivit knutet vid denna hypotes, skola vi här i stora drag redogöra för densamma, för att senare övergå till frågan om i vad mån den motsäges av senare vetenskapliga rön och upptäckter.

Vad man på Laplaces tid kände av solsystemet var följande: 1. Solen, 2. Planeterna: Merkurius, Venus, Jorden med dess Måne, Mars, Jupiter med 4, redan av Galilei 1610 upptäckta, månar, Saturnus med ring och 7 månar[1] samt Uranus med 2 månar[2]. Man hade funnit att samtliga dessa kroppar, utom Uranus' månar, vilkas banor

[1] Ringarna hade observerats av Galilei 1610, men av honom uppfattats som utväxter på planetens sidor, vilka, då de två år senare helt försvunnit — emedan ringen då vände sin kant mot jorden — syntes honom fullkomligt gåtfulla. Först mer än 40 år senare avslöjade Huygens ringens hemlighet och upptäckte den första Saturnusmånen, Titan, 1655. 4 nya månar upptäcktes av Cassini under loppet av de följande 30 åren, och år 1789 fann W. Herschel ännu 2.

[2] Som en egendomlighet kan nämnas, att man på denna tid och ända till mitten av 1800-talet tillskrev Uranus 6 månar. Sedan Herschel 1787 funnit de två yttre, ljusstarkare månarna, trodde han sig under observation av dessa ha sett ytterligare 4 månar. På grund av Herschels auktoritet, och då på den tiden intet teleskop kunde mäta sig med det Herschelska, togs hans uppgift för säker och stod oemotsagd till slutet av 1840-talet, då Lassel, efter att hava slutfört byggandet av sina stora reflektorer, befriade astronomien från denna villfarelse.

äro nästan vinkelräta mot ekliptikan, röra sig i plan, som endast obetydligt avvika från solens ekvatorsplan (de resp. banplanens lutningar mot ekliptikan variera mellan 0°,8 och 7°) och hava direkt rörelse (d. v. s. från Polaris sett i motsatt led mot visarnas gång över urtavlan) såväl i de resp. nästan cirkulära banorna som kring sina axlar, försåvitt dessa senare rörelser på L:s tid voro bekanta. Denna så gott som fullständiga överensstämmelse gav upphov till antagandet av ett gemensamt ursprung för samtliga kroppar i solsystemet, och på grundval härav utformade Laplace sin hypotes.

Enligt denna var solen ursprungligen omgiven av en glödande nebulosasfär, upptagande mer än hela solsystemets nuvarande omfång och långsamt roterande i samma led som planeterna nu röra sig. Så småningom avkyldes genom värmeutstrålning denna massa, som därigenom sammandrogs. Denna sammandragning åter hade till nödvändig följd en ökning av rotationshastigheten, vilken så småningom nådde ett belopp så stort, att centrifugalkraften i den roterande massans ekvatoreala ytterdel uppvägde attraktionen från centrum. Denna del lösgjorde sig då, bildande en fri ring i den ursprungliga massans ekvatorsplan, under det att de inre delarna alltjämt sammandrogo sig, alltmera ökande avståndet till den avsnörda ringen. — Detta upprepades undan för undan, så att ringar bildades på de avstånd från centrum, som motsvara de nuvarande planeternas. På grund av olika täthet i dessa ringar sprängdes de av den ömsesidiga attraktionen, och fortforo att som fria smådelar och på lika avstånd från solen omkretsa denna. Den största av dessa smådelar drog så småningom de andra till sig — och så bildades en planet. — På liknande sätt kunna månarna ha bildats genom ringavsöndringar från planeterna, och i Saturnusringen såg Laplace en sådan, ännu kvarbliven ring. De periodiska kometerna ansåg Laplace vara utifrån världsrymden komna små nebulosor, som av solens attraktion bundits vid solsystemet. Dessa kunna således röra sig i banor med snart sagt

vilka exentriciteter och lutningar som helst. — Detta är i korthet Laplaces hypotes, som ända till slutet av 1800-talet förblev allenahärskande inom kosmogonien. Den på grund av nya upptäckter ständigt vidgade kunskapen om vårt solsystem bestyrkte under nära ett århundrade efter Laplace hans teori, och först under de sista årtiondena ha upptäckter gjorts, gentemot vilka Laplaces hypotes, åtminstone icke i dess helhet, kan upprätthållas.

Vi skola här nedan redogöra för de sedan Laplaces tid gjorda erfarenheterna. — Den 1 januari år 1801 upptäckte Piazzi i Palermo i »luckan» mellan Mars' och Jupiters banor den första asteroiden, Ceres. 1804 upptäcktes av läkaren och amatörastronomen Olbers i Bremen en ny liten planet på ungefär samma medelavstånd från Solen som Ceres. Sedan Olbers framkastat den numera övergivna tanken, att dessa båda småplaneter kunde vara spillror av en förolyckad stor planet, och då man sålunda kunde vänta att finna ännu flera dylika spillror, började ett ivrigt sökande efter sådana, vilket under de 3 närmaste åren ledde till upptäckten av ytterligare 2 planetoider. År 1807 kände man sålunda 4 planeter mellan Mars och Jupiter. År 1845 fann Hencke, en amatörastronom i Dresden, en 5:e asteroid; 1846 upptäcktes en 6:e, och sedan denna tid — i synnerhet sedan år 1891 fotografien kommit astronomien till hjälp — har antalet kända småplaneter ständigt ökats, så att det nu överskridit 800. Samtliga dessa röra sig i direkt led — således i överensstämmelse med Laplace's hypotes. En del egendomligheter, värda att omnämnas, förete några av dessa småplaneters banor. Många äro mycket excentriska: Polyhymnia t. ex. rör sig i en bana, vars excentricitet är så stor, att den i aphelium är dubbelt så långt från Solen som i perihelium.[1] Starka lutningar, stundom överstigande 30°, utmärka många av dessa små kroppars banor: Pallas'

[1] Den punkt av en planets bana som är närmast solen kallas dess perihelium, och den i vilken planeten har sitt största avstånd från solen kallar man dess aphelium.

bana t. ex. lutar över 34° mot ekliptikan. Än större egendomligheter företer den lilla, år 1898 upptäckta, planeten Eros' bana. Dess perihelium är beläget långt innanför marsbanan, under det att dess aphelium ligger ett gott stycke utanför densamma. Denna asteroid kan vid vissa tidpunkter komma Jorden närmare än någon annan planet, en omständighet som möjliggör de noggrannaste avståndsbestämningar, varigenom avståndsförhållanden i hela solsystemet kunnat noga fixeras. De tre under åren 1906 och 1907 upptäckta små planeterna Achilles, Patroklus och Hektor däremot, röra sig i banor, som delvis ligga utanför Jupiterbanan (se fig. 1); den sistas bana t. o. m. till större delen utanför.

Från dessa små, huvudsakligen mellan Mars och Jupiter kretsande, planeter vända vi oss nu till vårt solsystems längst ut belägna regioner. Intill år 1846 var Uranus den yttersta kända planeten i solsystemet, men detta år medförde den märkliga upptäckten av Neptunus, vilken upptäckt utgör en av den teoretiska astronomiens stoltaste triumfer.

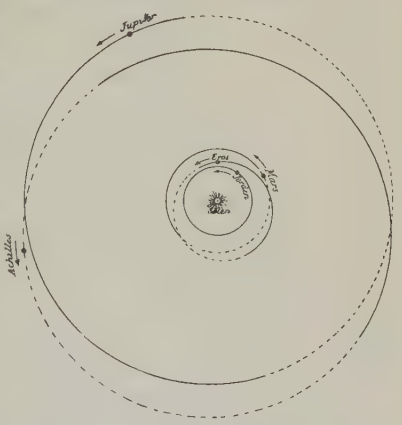


Fig. 1.
De bandelar, som ligga över ekliptikan, äro fulldragna; de under ekliptikan belägna äro prickade.

Vid observationer av Uranus hade man i början av 1800-talet konstaterat en del oregelbundenheter i dess banrörelse, visande sig däruti, att planeten så småningom alltmer avlägsnade sig från den förutberäknade orten. Detta kunde ej förklaras på annat sätt än genom antagandet av en annan ännu okänd, utanför Uranusbanan kretsande planet, som genom sin attraktion inverkade på Uranus rörelser. En ung pariserastronom, Leverrier, företog sig då att ur de observerade avvikelserna beräkna den bana, i vilken denna främling måste röra sig för att åstadkomma nämnda

avvikelser, ävensom den plats på himmelen, där den borde sökas. Sitt resultat meddelade han Galle i Berlin, som redan samma kväll brevet anlänt, den 23 sept. 1846, riktade sin refraktor mot den av Leverrier angivna punkten på himmelen. Det dröjde ej länge, förrän han upptäckte en på kartan ej upptagen stjärna, och då denna följande kväll rört sig så pass mycket i förhållande till kringliggande stjärnor, att den otvivelaktigt måste tillhöra vårt solsystem, kunde Leverrier underrättas om den faktiska existensen av hans beräknade planet. — Strax efter (år 1847) fann Lassel, att den nya planeten även hade en måne med en omloppstid av 6 dygn. Denna måne befanns ha retrograd rörelse d. v. s. motsatt mot den som alla dittills kända planeter och månar, utom Uranusmånarna (se ovan), befunnits äga. De nyaste undersökningarna ge oss anledning antaga, att Neptunus' rotation kring sin egen axel även försiggår i retrograd led.

Vi vända oss nu åter in mot solsystemets centrum, för att i den ordning vi möta dem i rymden redogöra för ytterligare upptäckter.

1851 upptäckte Lassel i London 2 nya Uranusmånar, vilka, i likhet med de två förut kända, röra sig i banor nästan vinkelräta mot ekliptikan. Dessa nya månar stå så nära planeten, att de omöjligt kunna hava varit två av de 4 månar, som Herschel trodde sig ha sett. Enligt senaste erfarenheter är det sannolikt, att Uranus rotationsaxel ligger i planetens banplan.

År 1818 fann Bond på Harwardobservatoriet en 8:e Saturnusmåne, och på Harwardobservatoriets filial i Sydamerika upptäcktes år 1898 den 9:e. 1905 fann Pickering den 10:e Saturndrabanten. Denna sistnämnda har nästan exakt samma omloppstid som den 8:e, men går vid sitt största avstånd från Saturnus utanför den 8:e, och i banans motsatta punkt innanför den första av Huygens upptäckta drabantens bana. Den 9:e kretsar långt utanför alla de andra och har retrograd rörelse. Vad Saturnusringen beträffar, är nu bevisat att densamma icke

är en stel ring, som man ännu för några årtionden sedan trodde. Vore ringen en stel kropp, skulle hastigheten i dess yttre delar vara större än i dess inre, men genom Keelers spektroskopiska undersökningar (1895) har konstaterats att rotationshastigheten, i enlighet med den 3:e av Keplers lagar för planeternas rörelser, avtar från ringens inre till dess yttre kant. Detta visar, att vad som för oss ter sig som en ring, eller rättare flera koncentriska ringar, i själva verket är en ofantlig anhopning av småkroppar, vilka var för sig icke kunna urskiljas, men som tillsammans bilda liksom en ringformig stoftmassa.

Vi övergå nu till Jupiter. Utom de förut nämnda, sedan Galilei's tid kända 4 jupiterdrabanterna, upptäckte Barnard på Lick-observatoriet 1892 en 5:e måne, och med fotografiens hjälp lärde man åren 1904, 1905, 1908 och 1914 känna ytterligare 4 jupitermånar. Dessa nyupptäckta drabanters banor luta — liksom för övrigt även de nyupptäckta saturnusmånarnas — starkt mot de övrigas. Dessutom tyckas den 6:e och 7:e Jupitermånens banor skära varandra. Den 8:e och 9:e Jupitermånen röra sig i retrograd led.

Vi överskrida nu åter asteroidernas breda zon för att några ögonblick uppehålla oss vid de solsystemets små dvärgar, som följa Mars på dess kretslopp kring Solen.

År 1877 fann Asaph Hall å Naval Observatory i Washington, att planeten Mars var åtföljd av 2 månar.

Båda dessa äro mycket små; troligtvis de minsta kroppar i solsystemet, som vi kunna se. Deras diameter torde icke överskrida 11 km. Man får en god föreställning om en sådan månes skenbara storlek genom att jämföra den med den skenbara storleken av ett litet äpple, hängande över Stockholm, och som iakttages med en kikare från Karlstad. — Den inre av dessa planeter, Phobos, som befinner sig på ett avstånd av endast 6 000 km. från planetens yta, har den kortaste kända omloppstiden i solsystemet: 7 timmar och 39 minuter, vilket är mindre än $^1/_3$ av den tid som Mars behöver för att rotera ett varv

kring sin axel. På grund av detta förhållande mellan Mars' rotation och Phobos' omloppstid, måste nämnda måne, trots dess rörelse i direkt led, för marsinnevånarna, om sådana finnas, synas gå upp i väster och ned i öster.

Som avslutning på denna översikt av den sedan Laplaces dagar vunna kunskapen om vårt solsystem kan omnämnas, att man under de båda sista årtiondena iakttagit oregelbundenheter i Neptunus banrörelse, som tyda på tillvaron av en utanför Neptunus kretsande planet. Ja, vissa fakta synas t. o. m. tala för sannolikheten av två »transneptuner».

Bland de kortperiodiska kometerna kunna vissa grupper, »kometfamiljer», urskiljas; en sådan familj har sina bortre brännpunkter belägna på olika ställen i Jupitersbanan, under det att en annans äro förlagda till Neptunusbanan. Nu har man funnit två sådana »familjer» med större exentriciteter, vilkas bortre brännpunkter befinna sig på respektive 125 och 300 jordbaneradiers avstånd från solen, vilka avstånd således skulle motsvara ovannämnda transneptuners resp. banradier. (Neptunus avstånd är 30 jordbaneradier.) Huruvida dessa planeters existens under den närmaste tiden genom direkta observationer kan komma att bestyrkas, torde dock på grund av de väldiga avstånd som skilja oss från dem kunna betvivlas.

Vi ha således funnit, att minst 4 kroppar i solsystemet hava rörelser, som äro rakt motsatta dem, som Laplaces hypotes förutsätter; att likaledes minst 4 kroppar röra sig i banor, vilkas plan stå nästan vinkelrätt mot ekliptikan, samt att ett stort antal av vårt solsystems medlemmar kretsa i banor med starka lutningar. Vi se oss härav nödsakade att tillgripa en annan hypotes till förklaring av dessa kroppars rörelser, och man har därvid utgått från det antagandet, att dessa drabanter från början alls icke tillhört sina respektive moderplaneter, utan att de äro utifrån komna kroppar, som infångats i sina nuvarande system. I detta antagande stärker oss de sedan länge observerade, talrika s. k. »kometfångsterna», vilka också

förklara förekomsten av de ovan omtalade kometfamiljerna. Så har t. ex. Jupiter, jätten bland planeterna, upprepade gånger, då kometer kommit i hans närhet, förorsakat rubbningar i dessas banor, så att de tvungits in i helt nya och trängre kretslopp. Fig. 2 åskådliggör det ungefärliga förloppet härvid. Utan tvivel ha på enahanda sätt även andra mindre kroppar, då de kommit i grannskapet av de stora planeterna, tvungits ur sina förutvarande banor och infångats. — Nu likna de små månarna i många avseenden planetoiderna, och denna omständighet, i förening med det ovan omskrivna faktum, att deras banor sträcka sig såväl innanför Mars' som utanför Jupiters bana, gör det i högsta grad sannolikt, att de ovan nämnda säregna Mars- och Jupiterdrabanterna icke äro annat än f. d. små planetoider, infångade av sina nuvarande moderplaneter. På liknande sätt kunna även de från regeln avvikande banrörelserna hos Saturnus' och Neptunus' månar förklaras, och man skulle väl även kunna våga framkasta den frågan, om icke t. o. m. Uranus (med sin liggande rotationsaxel?) och Neptunus (med retrograd rotation?) från början voro främlingar för det solsystem de nu tillhöra.

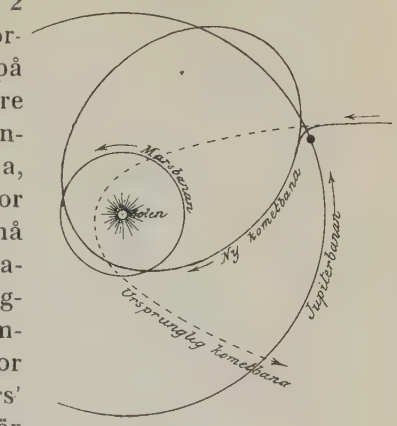


Fig 2.

Till ovan omskrivna fakta, som alls icke låta sig förenas med Laplaces hypotes, kommer vidare, att de begynnande stjärnbildningar, som man numera ansett sig ha konstaterat i ett stort antal nebulosor, icke, som teorien skulle giva vid handen, ske genom bildandet av en enda stjärna i nebulosans mitt, utan fastmer uppvisa det samtidiga bildandet av flera stjärnor på olika platser inom densamma. — Även andra invändningar — av mekanisk och fysikalisk art — ha på senare tid gjorts mot Laplaces

hypotes, som således icke längre synes hållbar. — Vidare kan mot Laplaces teori göras den anmärkningen, att den såsom kosmogonisk hypotes är ofullständig, i det att den utgår från nebulosan, utan att förklara dennas uppkomst.

Vi skola nu övergå till en kort skildring av en i detta avseende fullständigare hypotes, baserad på de modernaste vetenskapliga upptäckterna och erfarenhetsrönen. Den har uppställts av Arrhenius och publicerades i hans bok »Världarnas utveckling» 1906. — Vi ha då först att omnämna en sedan Laplaces dagar upptäckt naturkraft, det s. k. strålningstrycket. Före upptäckten av denna kraft hade man endast de Newtonska gravitationslagarna att hålla sig till vid förklaringen av alla företeelser i universum. Men om inga andra krafter existera, skulle så småningom en sammanhopning av den befintliga materien äga rum, i det att alla större kroppar skulle draga till sig de mindre. Då universum måste antagas ha existerat i oändlig tid, skulle denna materiens sammangyttring redan ha ägt rum, vilket vi ju veta icke är förhållandet. Det måste således existera krafter, som motverka gravitationen. Redan Kepler antog tillvaron av en dylik kraft, men först i senaste tid ha skilda forskare till fullo ådagalagt dess faktiska existens. Arrhenius har visat, att på grund av strålningstrycket ständigt ofantliga massor små materiepartiklar utslungas i alla riktningar från solarna. Ute i rymden baka dessa små partiklar ihop sig och bilda större kroppar t. ex. meteorer och kometer, vilka på sina vägar kunna råka in i en av dessa ofantliga dunstmassor, som kallas nebulosor. Inkomna i en sådan förlora de, på grund av det motstånd som nebulosan erbjuder, sin egen rörelse, och tvingas genom friktionen att deltaga i nebulosans rotation. Samtidigt öka de sin massa genom att kring sig kondensera och förtäta nebulosamaterien och genom att med sig förena de ständigt invandrande stoftpartiklar, som utslungas från solarna.

På detta sätt skulle enligt Arrhenius' teori planeterna ha uppkommit. Om så en mindre, kosmisk kropp kommer i dess närhet, tvingas den genom den större attraktion att

gå runtomkring denna, bildande en drabant, vars rotation och banrörelse enligt mekaniska lagar bestämmas av systemets rotation. Om nu en sådan kropp invandrar först vid en så sen tidpunkt i systemets utveckling, att nästan all nebulös materia förbrukats av de äldre kondensationskärnorna, är den kvarvarande tätheten icke tillräckligt stor för att fullständigt upphäva och ombilda nykomlingens egen rörelse, vadan denna skulle få behålla en del av sin individualitet i detta avseende. På så sätt skulle t. ex. Uranus' och Neptunus' samt deras månars rörelser få sin förklaring.

Men även stjärnor, lysande eller slocknade, kunna under sina vandringar genom rymden råka in i en nebulosa. De större och hastigare slå sig igenom den tunna nebulosamaterien och kunna efter tusentals år lämna den bakom sig. De mindre och långsammare däremot hejdas i sina banor och fasthållas i nebulosan,[1] var och en utgörande ett attraktionscentrum, som kring sig kondenserar de omgivande nebulosagaserna och infånga kringströvande mindre meteoriter. Man kan tydligt iakttaga en förtunning av töckenmaterien omkring de i nebulosan befintliga stjärnorna. Allteftersom denna kondensation framskrider, ersättes från nebulosans inre, tätare delar den kondenserade materien, tills slutligen all nebulös materia är förbrukad, och nebulosan övergår till stjärnhop eller planetsystem med en eller flera solar.

Vi hava nu sett hur planetsystem enligt Arrhenius' teori kunna tänkas hava uppkommit ur nebulosor. Det återstår oss att redogöra för hans åsikt om själva nebulosans uppkomst, och vid redogörelsen härför möta vi en annan faktor, som tillsammans med verkan av strålningstrycket motarbetar den materiens sammangyttring, som skulle bliva en följd av gravitationens uteslutande verkan, nämligen sammanstötningen mellan himlakroppar.

Med antagande av att det finnes hundra gånger så många

[1] Den väg, som stjärnan följt genom nebulosan, visar sig i båda fallen som en tydlig fåra. Särskilt starkt framträdande äro sådana fåror i en nebulosa i stjärnbilden Svanen.

slocknade som lysande stjärnor, har man med sannolikhetskalkylens hjälp uträknat, att, för att en himlakropp av samma dimensioner som vår sol och med en hastighet av 20 km. per sek. sannolikt skall kollidera med en annan, lysande eller mörk, kropp, behöves 1 000 biljoner år. Vida större sannolikhet finnes för att en sådan himlakropp skall stöta samman med en nebulosa, som ju har ofantligt mycket större utsträckning i rymden. Nu kan det visserligen, som förut är påpekat, hända, att kroppen passerar genom nebulosan utan vidare äventyr, men sannolikheten för en sammanstötning med en annan kropp ökas högst väsentligt vid inträdet i nebulosan, emedan där, som ovan sagts, en mängd lysande och mörka kroppar äro hopsamlade.

Ej sällan se vi på himmelen en ny stjärna uppflamma (Tyko Brahes stjärna, Betlehems stjärna), som stundom under någon tid med sin glans överstiger alla andras för att sedermera åter avtaga och så småningom alldeles slockna, endast efterlämnande ett gastöcken, eller nedsjunka till mycket obetydlig ljusstyrka. Knappast ett år går om, utan att en eller flera sådana nya stjärnor iakttagas. Det lider knappast något tvivel om att vi i dessa fenomen ha att se de för oss synliga verkningarna av stjärnsammanstötningar. Före kollisionen voro båda kropparna mörka, eller så svagt lysande att de ej kunnat observeras, men genom det av stöten alstrade värmet bliva de lysande. En sådan »ny stjärna», vars avstånd beräknats till minst 120 ljusår[1], visade en ljusstyrka överstigande stjärnors av 1:a ordningen, vadan dess strålning måste flera tusen gånger ha överträffat vår sols. Det värme som alstras vid en sådan oerhört våldsam stöt har Arrhenius visat vara tillräckligt för att upplösa de båda kolliderande kropparna i en dunstmassa av så oerhörda dimensioner som även de mest utsträckta nebulosor äga. Om vi bortse från de resp. kropparnas rotation före sammanstötningen, som i jämförelse med den hastighet av flera

[1] Ett ljusår är den väg (9,5 biljoner km.) som ljuset på ett år tillryggalägger i rymden.

hundra km. i sek., med vilken de störta samman, är försvinnande liten, så kan stöten vid kollisionen vara av två slag: central eller sned. En fullkomligt central stöt måste ju vara oerhört sällsynt, men en del olika omständigheter kunna inverka därhän, att stöten kan bli nära central. Om vid en sådan nästan central stöt, de kolliderande kropparna äro av ungefär samma storlek, så antager den genom sammanstötningen uppkomna nebulosan formen av en skiva; om däremot den ena kroppen är betydligt större än den andra, bör en nebulosa av konisk form bildas. Nebulosor av det förra slaget äro kända under namnet planetariska nebulosor. Om däremot, som i allmänhet är fallet, stöten är sned, måste en hastigt roterande nebulosa uppkomma. Vid sammanstötningen slungas den förgasade materien ut i två väldiga kärvar, liggande i det banplan, i vilket kropparna rörde sig vid tidpunkten för kollisionen, och efter sammanstötningen fortsätta dessa gaser att med en våldsam fart drivas ut kring det häftigt roterande centrala partiet. I detta fall har sammanstötningen alstrat en spiralnebulosa, vilken för oss ter sig som en tätare centralkropp, omslingrad av två spiralarmar med utåt så småningom avtagande täthet. Ur detta slag av nebulosor kunna under vissa omständigheter ringnebulosor bildas. Även hos de oregelbundna nebulosorna har ofta spiralstruktur konstaterats.

Vi hava således sett hur stjärnhopar och planetsystem kunna tänkas hava uppstått ur nebulosorna, samt hur lysande eller slocknade stjärnor i sin tur kunna ge upphov till nya nebulosor. Det blir härigenom möjligt att världsförloppet kan försiggå i en evig kretsgång med ständig förnyelse och ständigt fortgående utveckling — allt utan början och utan slut.

Emellertid har mot denna teori, liksom mot alla andra, vilka på senare tid framställts, en hel del invändningar gjorts, och den har på långt när icke tillvunnit sig den nästan fullständiga anslutning, som Laplaces hypotes på sin tid uppnådde.

Är vikt ett mass- eller kraftbegrepp?

Av OTTO GALLANDER.

Då en kropps massa är oberoende av den breddgrad, på vilken kroppen befinner sig, men jordens dragning på densamma är en funktion av breddgraden, är det lätt att besvara ovanstående fråga. I dagliga livet menas otvivelaktigt med en kropps vikt dess massa. Härav följer, att med kg i sifferräkneläror etc. menas kg_{massa}. Men så kommer man i skolan till studiet av statiken. Där definieras kroppens vikt som jordens dragning på densamma, således som kraft, och i det sammanhanget framställes då nödvändigtvis, att en kropps vikt ändras med breddgraden. Kilogrammet införes sedan som kraftenhet. Vid fortsatt studium av fysiken fasthålles dock ej härvid. På åtskilliga ställen blir vikt åter uttryck för massa. Så t. ex. i värmeläran vid definitionen av specifikt värme, smältvärme etc. Dessa storheter äro naturligtvis oberoende av breddgraden, och om man använder ordet viktsenhet i dessa definitioner, menas således massenhet. Detta är en ganska betänklig begreppsförvirring. De unga vållar det besvär att ha ett system, där kg är massenhet, ett annat, där kg är kraftenhet, och till råga på dessa olägenheter saknas namn på massenheten i det senare systemet

Enda möjligheten att komma ifrån dessa oegentligheter torde vara att fasthålla vid kg som massenhet och låta vikt ständigt beteckna massa. Krafter skulle då mätas i dyn, resp. megadyn Denna sistnämnda enhet blir nästan lika stor som 1 kg_{kraft} och lämpar sig således likaväl som kg_{kraft} till kraftenhet.

Kungl. mynt- och justeringsverkets förslag till författningar om mått och vikt m. m. 1918 upptar ett fullständigt system i denna riktning, och i detta avseende torde nämnda förslag böra stödjas av oss lärare. Utan arbete går det ej att genomföra denna viktiga reform, isynnerhet som den är av internationell betydelse.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

Karl A. Hofmann. *Lehrbuch der anorganischen Experimentalchemie* (XX + 794 s.), Vieweg 1918.

Genom professor H. Erdmanns frånfälle upphörde hans även i Sverige mycket använda »*Lehrbuch der anorganischen Chemie*» att utkomma i nya upplagor. Från förlaget riktades då till hans efterträdare som professor i oorganisk kemi vid tekniska högskolan i Charlottenburg *Karl A. Hofmann* en begäran om ny bearbetning. Han förklarade sig därvid icke bokstavligen kunna efterkomma denna önskan. I en modern kemisk lärobok borde enligt hans åsikt vida mera av rent teoretisk art medtagas och behandlingssättet av det rent oorganiska studiematerialet måste på grund av den långa raden av nya, delvis revolutionerande rön som gjorts väsentligt omläggas. — I stället riktades den kemiska läroboksliteraturen med en helt ny lärobok, ny även i ordets bokstavliga bemärkelse. Vi återfinna i K. A. Hofmanns lärobok varken den vidlyftiga behandlingen av ett för en lärobok onödigt stort antal kemiska föreningar eller den minutiösa beskrivningen av en mångfald experiment. Bådadera finnas i väl avvägda proportioner. I stället få vi det nödvändigaste av teorien och hålla oss samtidigt i intim kontakt med de tekniska tillämpningarna även av allra senaste datum. Och vi få taga del av detta på ett sätt, som för en kemist, och jag tror även för lekmannen, måste anses såsom särdeles njutbart. Boken är nämligen i den mån en vetenskaplig framställning kan vara det fullt läsbar för vem som helst, som något befattat sig med kemi. Man har hela tiden intrycket

av en studiefärd tillsammans med en ovanligt kunnig ledare, som utan att förvanska erfarenhetsmaterialet, binder det tillsammans och visar det på ett utpräglat personligt sätt. Genom hela arbetet går således en tydligt skönjbar, röd tråd, som är författarens egen åsikt. Den tråden är ingen risk att följa, då den lagts ut av en inom den oorganiska kemiens labyrint så väl erfaren förare som K. A. Hofmann. Ref. kan under dessa förutsättningar icke finna den subjektiva framställningen som någon brist. Tvärtom! För den mindre erfarne underlättas systematiserandet, för den med kemiskt studium mera förtrogne erbjuda sig utmärkta tillfällen till prövande och modifierande av egna åsikter genom den ständiga kontakten med en annans uppfattningssätt.

Under det att undertecknad har den allra bästa erfarenhet av elevers studium av boken som överkurs, är den dock att på det livligaste förorda som en *lärobok för lärare.*

Det vore egendomligt om ett arbete skulle ha uteslutande förtjänster. Ett och annat torde också beträffande detta kunna anmärkas. Det fysikalisk-kemiska materialet är således i allmänhet mindre ingående behandlat än i *Hollemans* lärobok, under det att å andra sidan frågor rörande materiens struktur och härledandet av ett ämnes kemiska egenskaper ur molekylens byggnad behandlats på ett synnerligen förtjänstfullt sätt. På flera ställen möter oss en intressant redogörelse för eller tillämpning av affinitetsteoretiska spörsmål och reaktionsförmågans beroende av polymerisation och »status nascendi». Sammanfattningen av modern strukturteori borde dock givetvis ha gjorts fullständigare, alldenstund Werners »*Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie*» sätter rätt stora krav på företagsamhet, och i varje fall torde vara tämligen ointaglig för den som icke är kemist av facket. Om också denna teori ännu ingalunda kan betraktas som fullt utformad, torde den dock redan på flera områden, t. ex. komplexa och kondenserade föreningars kemi, ha bragt

mycken reda åstad. Så har — som K. A. Hofmann också på flera ställen framhåller — enligt modern strukturuppfattning en vida bättre överensstämmelse mellan ämnets formel och dess kemiska och fysikaliska egenskaper ernåtts. En för läsaren absolut obegriplig åtgärd är det varierande skrivsättet för en och samma formel. Så tecknas t. ex. svavelsyra, salpetersyra, saltsyra, natriumhydrat än H_2SO_4, HNO_3, HCl, NaOH som vanligt, än SO_4H_2, NO_3H, ClH, OHNa. Enligt meddelande till undertecknad, avses härmed att sätta det ämne först, vars kemi i det föreliggande kapitlet behandlas. Då man läser svavel, heter svavelsyra således SO_4H_2, annars H_2SO_4; vid studiet av klorens kemi tecknas saltsyra ClH, annars HCl o. s. v. Frånsett att detta nu ingalunda konsekvent genomförts, gör det hela intrycket av ett synnerligen valhänt försök att handskas med pedagogik. Med skäl torde det vara att hoppas, att i kommande upplagor — två föreligga redan — formlerna genomgående skrivas på vanligt sätt, såvida de ej modifierats i överensstämmelse med ev. strukturkemiska krav.

Örebro 20/1. *J. Arvid Hedvall.*

Angående höstterminens fysiska studentskrivningar.

Det fjärde problemet lydde:

»En kvicksilvertermometer är graderad så, att den visar rätt, då hela instrumentet har samma temperatur. Vid ett tillfälle, då termometern med sin nedre del till gradstrecket +50 var nedsänkt i ett oljebad, vars hela massa genom omröring hölls vid samma temperatur, visade den +172,°0. Vilken var oljebadets sanna temperatur, då man kan räkna med att termometerns ovan oljebadet befintliga del hade en temperatur av +32°? Kvicksilvrets volymutvidgningskoefficient är $\alpha = 0{,}000181$, glasets $\beta = 0{,}000027$.»

Den så att säga »klassiska» lösningsmetoden för detta problem, en metod som förekommer i de flesta större läroböcker i fysik, men väl knappast i någon för abiturienterna avsedd, består däri, att man även tänker sig de överskjutande 122 skaldelarna (vilka då antagas hava samma volym) uppvärmda till $x°$, varvid man då måste använda kvicksilvrets skenbara utvidgningskoefficient $\alpha - \beta$, och således får

$$x = 172 + 122\,(x - 32)(\alpha - \beta),$$

vilket ger $x = 174{,}63$ eller $174{,}68$ allteftersom man tillåter sig att approximera x i högra membrum till 172, eller icke.

Så till vida är allt gott och väl, men det är ingalunda säkert, ja knappt ens önskvärt, att abiturienten just skall slå in på denna väg, om vars approximationsgrad han just ej kan bedöma någonting. Snarare torde han böra slå in på den väg, om vilken han lärt sig, att den är den enda som med säkerhet leder till målet, nämligen att uppskriva att kvicksilvrets *vikt* vid alla temperaturer är lika. Han skall då först uppskriva det som särskilt uppgives i exemplets början, nämligen att termometern visar rätt, då den helt och hållet har samma temperatur. Kallas då vid 0° volymen under 0-punkten V_0 och volymen av ett delstreck V_1 samt Hg:s sp. vikt s, så fås $V_0 s = (V_0 + tV_1)(1 + \beta t) \cdot \dfrac{s}{1 + \alpha t}$.

Då t ej försvinner ur denna ekvation, så leder redan detta honom in på en del spekulationer om delstreck av olika volym o. d., vilket skulle innebära ett hav av svårigheter som han omöjligt kunde lösa. Låtom oss därför anta, att han då kommer underfund med, att det inte är så allvarsamt menat med att termometern går rätt, utan att han verkligen försummar 2:a-gradstermen och får

$$V_1 = V_0\,(\alpha - \beta).$$

Han får då sedan ur problemets villkor:

$$V_0 s = \frac{(V_0 + 50V_1)(1 + \alpha x) \cdot s}{1 + \alpha x} + \frac{122V_1(1 + 32\beta)s}{1 + 32\alpha},$$

eller genom insättn. av föregående:

$$1=\frac{[1+50(\alpha-\beta)][1+\beta x]}{1+\alpha x}+\frac{122(\alpha-\beta)(1+32\beta)}{1+32\alpha}.$$

Uträknas detta omedelbart med räknemaskin, så fås $x=175{,}496$, och med 7-ställiga eller 5-ställiga tabeller 175,5, vilka tal redan ganska nämnvärt skilja sig från de ovan erhållna 174,6 och 174,7, särskilt om man betänker, att talet 172,°0 i uppgiften är uppgivet på tiondels grad. Vilketdera som i praktiken är riktigare torde vara svårt att avgöra.

Värre blir det emellertid, om abiturienten på ovanstående ekvation tar sig till att göra sådana approximationer, som han lärt sig, att han i allmänhet får göra. Han kan då få ungefär vad som helst, till och med tal som äro mindre än 172, så att han får korrektionen negativ i st. f. positiv.

Låt honom t. ex. skriva den:

$$1=[1+50(\alpha-\beta)][1-x(\alpha-\beta)]+122(\alpha-\beta)[1-32(\alpha-\beta)]$$
$$1=1+(50-x)(\alpha-\beta)+122(\alpha-\beta)[1-32(\alpha-\beta)],$$

varav

$$x=172-122\cdot 32(\alpha-\beta)=172-0{,}601.$$

Eller, än värre, låt honom skriva den:

$$\frac{1+\beta x}{1+\alpha x}=1-\frac{122(\alpha-\beta)(1+32\beta)}{1+32\alpha}\cdot\frac{1}{1+50(\alpha-\beta)}$$

eller

$$1-x(\alpha-\beta)=1-50(\alpha-\beta)-122(\alpha-\beta)[1-32(\alpha-\beta)]\cdot$$
$$\cdot[1-50(\alpha-\beta)]=$$
$$=1-50(\alpha-\beta)-122(\alpha-\beta)[1-82(\alpha-\beta)]$$

varav

$$x=172-122\cdot 82(\alpha-\beta)=172-1{,}54$$

*

Vi se således, att det ifrågavarande exemplet är föga lämpligt, vilket, om vi minnas rätt, redan anmärktes då snarlika exempel förut gåvos (t. ex. H. T. 1900), men i detta fall är det särskilt olämpligt, då det knappt finnes något exempel, annat än möjligen det första, som verkligen kan anses avsett för de svagare lärjungarna.

M—r.

En svensk minnesvers för talet π.

I sin »*Infinitesimalrechnung*», utgiven å samlingen »*Aus Natur und Geisteswelt*», pag 76, omnämner Professor *G. Kowalewski* följande franska minnesvers för talet π:

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
3 2 3 8 4 6 2 6
qui de ton jugement peut priser la valeur!
4 3 3 8 3 2 7 9
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Antalet bokstäver i varje ord anger i ordning de 31 första siffrorna uti talet π, *oavkortat.*

Intresserad av detta franska experiment har jag här nedan vågat mig på ett motsvarande försök på svensk hexameter, angivande de trettiofyra första siffrorna uti talet π, *avkortat.*

3 1 4 1 5 9 2 6 5
Hör' I alla: i kväll Arkimedes ju lovade komma;
3 5 8 9 7 9 3 2
han skall noggrant klarlägga berömda siffrorna för pi,
3 8 4 6 2 6 4 3 3
som förvisso rätt mången ej minnes utan ett ode.
8 3 2 7 9 5 0 3
Tjugutvå giv åt täljarn, nämnarens värde, o, sju!

Anm 1. Apostrofen efter ordet *hör* betyder *decimalkommat.*

Anm 2. Utropet *o* i sista raden är av *noll* och intet värde.

Anm. 3. Liksom π självt är även sista raden *metriskt avkortad.*

Anm. 4. Ersättes sista siffran 3 med »*två åttor*» (288) fås *Ludolfska talet*, d. v. s. π bestämt på 35 decimaler.

Gustaf Lindborg.

Tvållösning för ytspänningsförsök.

En tvållösning, som utmärkt lämpar sig för ytspänningsförsök, erhålles enligt Watson, Practical Physics, på följande sätt. I en viss volym destillerat vatten löses utan uppvärmning fyrtiondedelen av dess vikt ren tvål. (Undertecknad har med gott resultat använt Sunlighttvål.) Till lösningen sättes en volym glycerin lika med tredjedelen av vattenvolymen, varpå blandningen omskakas väl. Den får sedan stå i slutet kärl en veckas tid i mörkrum. Därefter avskiljes den klara lösningen medelst hävert (ej filtrering!), och efter tillsats av några droppar stark ammoniak är den färdig att tagas i bruk. Tvållösningen bör förvaras i väl korkat kärl och i mörker.

E. Friman.

Matematiska uppgifter.

61) Basen i en likbent triangel är harmoniska mediet mellan benet och höjden. Hur stora äro vinklarna?

C. H.

62) Om i en rätvinklig triangel med hypotenusan a och kateterna b och c, man har $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{m}{a}$, bestäm gränserna för m. *C. H.*

63) Att upprita en parabel, då axeln och två punkter på kurvan äro givna. *S. B—n.*

64) En sned cirkulär kon har basradien r och axeln l, vilken med basplanet gör vinkeln α. Bestäm vinkeln mellan generatriserna i det axelsnitt, som står på en diameter, som gör vinkeln v med axelns projektion. *E. S.*

65) Från en punkt P på avståndet a från medelpunkten O till en cirkel med radien r drages en sekant PAB. PO eller dess förlängning råkar cirkeln i D. Sök maximum och minimum för $\triangle DAB$. *M—r.*

66) Bevisa a) att kortaste avståndet från en punkt inom en cirkel till periferin i genomsnitt är en tredjedel av radien, och b) att kortaste avståndet från en punkt inom en triangel till omkretsen i genomsnitt är en tredjedel av den inskrivna cirkelns radie. *X.*

Lösningar till uppgifterna i h. 1. 1919—20.

49) *Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i ändpunkterna av två mot varandra vinkelräta brännpunktsradier i en parabel.*

Kallas en punkt på orten $(x'y')$ och parabeln $y^2=4ax$, så är tangentkordan $yy'=2a(x+x')$. Förenas denna med parabelns ekvation, så blir, om dels x, dels y elimineras,

$$y^2-2yy'+4ax'=0$$

och
$$x^2+x\left(2x'-\frac{y'^2}{a}\right)+x'^2=0,$$

vilka ekvationer således satisfieras av de båda tangeringspunkterna (x_1y_1) och (x_2y_2). Men emedan dessa båda punkters föreningslinjer med $(a, 0)$ skola vara vinkelräta mot varandra, fås

$$\frac{y_1y_2}{(x_1-a)(x_2-a)}=-1$$

eller
$$y_1y_2+x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2=0,$$

vilket enligt lagen om andragradsekvationens rötter ger

$$4ax'+x'^2+a\left(2x'-\frac{y'^2}{a}\right)+a^2=0,$$

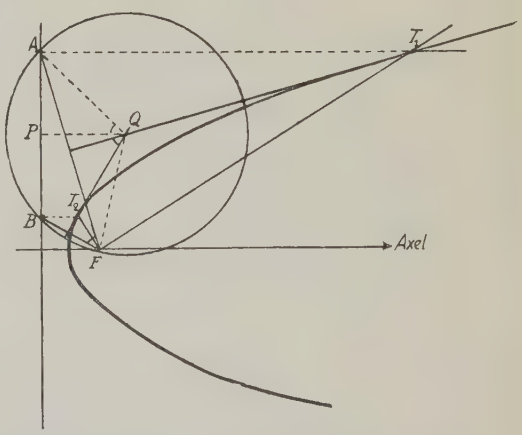
eller efter förenkling och accenternas borttagande

$$x^2+6ax-y^2+a^2=0 \text{ eller } (x+3a)^2-y^2=8a^2,$$

en liksidig hyperbel. (Löst av *C. H.*)

Till detta problem har inkommit följande vackra generalisering, där brännpunktsradiernas vinkel sättes $=\alpha$ i st. f. 90°.

Tangenten till parabeln i punkten T_1 bildar hälften så stor vinkel med axeln som fokalradien FT_1. Om därför $\alpha \leqq \pi$ är vinkeln T_1FT_2, måste vinkeln T_1QT_2 mellan tangenterna i T_1 och T_2 vara $\frac{\alpha}{2}$ eller $\pi-\frac{\alpha}{2}$; det första värdet, om Q och parabeln ligga på var sin sida om styrlinjen (s), det senare, om de ligga på samma sida; för $\alpha=\pi$, ligger Q på styrlinjen, vilket följer ur nedan nämnda konstr. av tangenterna QT_1, QT_2.



Den sökta orten är alltså samtidigt orten för en punkt Q, i vilken de bägge tangenterna QT_1, QT_2 till parabeln bilda vinkeln $\frac{\alpha}{2}$ eller $\pi-\frac{\alpha}{2}$. Att denna ort är en hyperbel följer enkelt ur följande konstruktion av tangenterna QT_1, QT_2: Cirkeln med centrum i Q och radien QF skär styrlinjen (s) i A och B.

De sökta tangenterna äro normalerna QT_1, QT_2 mot FA, FB resp. Om man drager $QP \perp s$ och AQ, följer lätt:

$$\angle AFB = \frac{\alpha}{2} = \angle PQA \text{ och } \frac{QF}{QP} = \frac{QA}{QP} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

d. v. s. *orten för Q är en hyperbel (H), som har en brännpunkt F och tillhörande styrlinje gemensamma med parabeln, och excentriciteten* $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. För $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ erhålles s som ort.

Samma bevis, då Q ligger på andra sidan styrlinjen. Om T_1F och T_2F utdragna skära parabeln ytterligare i T'_1 och T'_2 resp., råkas tangenterna i T'_1 och T'_2 även på H. Däremot råkas tang. i T_1, T'_2 på en andra hyperbel H', som motsvarar $\alpha' = \pi - \alpha$. På H' råkas även tang. i T_2 och T'_1. Endast som $\alpha = \frac{\pi}{2}$, sammanfalla H och H'. Den 4-siding, som bildas av tangenterna i T_1, T_2, T'_1, T'_2, har alltså för $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ständigt 4 av sina 6 hörn på hyperbeln H, medan de bägge återstående (skärningspunkten mellan tang. i T_1 och T'_1 och mellan tang. i T_2 och T'_2) ligga på styrlinjen, som motsvarar $\alpha = \pi$. *X.*

50) *Sök geometriska orten för den punkt, varifrån tre givna sfärer synas under samma synvinkel.*

Delas två av de tre centrallinjerna harmoniskt i resp. radiers förhållande och de båda harmoniska sfärerna uppritas, så är deras skärningscirkel den sökta orten. Äro de tre sfärernas radier lika, så blir orten en rät linje, vinkelrät mot planet genom medelpunkterna och gående genom medelpunkten till den genom dem gående cirkeln.

(*C. H.*)

51) *Om p är ett primtal > 3, så är*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (p-1)^2 \text{ divisibelt med } p.$$

Enligt en känd summationsformel är den givna summan

$$s = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6},$$

men då s måste vara ett helt tal och p är ett primtal >3, så är $(p-1)(2p-1)$ divisibelt med 6, således

$$\frac{s}{p} = \frac{(p-1)(2p-1)}{6} \text{ ett helt tal.}$$

(*Gösta Björck, C. H.*)

Till denna sats ha insänts följande generaliseringar:

1) Satsen kan utsträckas till det fall att p är ett udda tal, vilket som helst, ej delbart med 3 (utom $p=1$).

Då p ej är delbart med 3, så är $2p$ ej delbart med 3, och således antingen $2p-1$ eller $2p-2$ delbart med 3. Således är antingen $2p-1$ eller $p-1$ delbart med 3. Då därjämte $p-1$ är delbart med 2, så är således $\frac{(p-1)(2p-1)}{6}$ ett helt tal. (*C. H.*)

2) Med någon utvidgning av kongruensteoriens elementer, sådana de framställas i adjunkten Karl Blix' förträffliga uppsats i häft. 2 av denna årgång (sid. 65 o. f.), kan man lätt bevisa den allmännare satsen: *Om p är ett primtal, gäller*

$$1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r \equiv 0 \pmod{p}$$

för alla hela tal r, som ej äro divisibla med $p-1$;
för $r = k(p-1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, är

$$1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r \equiv -1 \pmod{p}.$$

Hjälpsats 1. Låt p vara ett primtal. Varje helt tal är mod. p kongruent med ett och endast ett av talen $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Om $a \mid 0 \pmod{p}$ (a betyder i likhet med alla bokstäver i det följande ett av talen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), *äro talen* $a \cdot 0, a \cdot 1, \ldots, a(p-1)$ mod. p *kongruenta med var sitt av talen* $0, 1, \ldots, p-1$.

Vore nämligen $ar_1 \equiv ar_2 \pmod{p}$ måste $r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$ (sats 9, sid. 67), vilket är omöjligt, om r_1, r_2 äro två distinkta tal i raden $0, 1, \ldots p-1$. Då $a \cdot 0 \equiv 0 \pmod{p}$, äro $a \cdot 1$, $a \cdot 2, \ldots$, $a(p-1)$ kongruenta med var sitt av talen $1, 2, \ldots$, $p-1$, d. v. s.

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} a \cdot 1 &\equiv a_1 \pmod{p} \\ a \cdot 2 &\equiv a_2 \quad \text{»} \\ &\vdots \\ a(p-1) &\equiv a_{p-1} \pmod{p}, \end{aligned}$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ äro samtliga $1, 2, \ldots, p-1$ i någon viss ordningsföljd (som beror av a).

Ex. 51 bevisas omedelbart härur. För $p > 2$ kan man i kongruenserna (A) välja $a = 2$ och erhåller genom kvadrering och addering

$$(2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + \ldots + [2(p-1)^2] \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{p-1}^2 \pmod{p}$$

eller

$$2^2[1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2] \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 \pmod{p},$$

om man i högra membrum placerar talen $a_1, \ldots, a_{p-1}$ i deras naturliga ordningsföljd.

Därav följer

$$(2^2 - 1)[1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2] \equiv 0 \pmod{p}$$

och för $p > 3$ slutligen

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

För att bevisa vår allmännare sats härleda vi först ur föregående hjälpsats

Cor. 1. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ *för alla* $a \not\equiv 0 \pmod{p}$. (*Fermats sats.*)

Bevis: Genom multiplikation av motsvarande membra i (A) erhålles

$$a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p},$$

(sedan $a_1, \ldots, a_{p-1}$ placerats i den nat. ordningsföljden), varav

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vidare följer

Cor. 2. Kongruensen $ax \equiv b \pmod{p}$, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ *har en och endast en lösning modulo p.* Ty då x genomlöper $0, 1, \ldots, p-1$, inträffar för ett x-värde: x att $ax \equiv b \pmod{p}$. De enda x, som satisfiera kongruensen, äro då $x = x + kp$, emedan $ax_1 \equiv b \pmod{p}$, $ax_2 \equiv b \pmod{p}$ medföra $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{p}$ och $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$. Inbegreppet av dessa kongruenta tal kallas *en* lösning. Denna lösning kan betecknas $\frac{b}{a}$, vilken symbol alltså betyder ett vilket som helst av talen $\bar{x} + kp$, så att $a \cdot \frac{b}{a} \equiv b \pmod{p}$.

Speciellt existerar $\frac{1}{a}$ för $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ och $a \cdot \frac{1}{a} \equiv 1 \pmod{p}$. Då är även $a^r \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^r \equiv 1 \pmod{p}$ d. v. s. $\frac{1}{a^r} \equiv \left(\frac{1}{a}\right)^r \pmod{p}$. Om man definierar en negativ dignitet a^{-r}, $r > 0$, med $a^r \cdot a^{-r} \equiv 1 \pmod{p}$, blir alltså $a^{-r} \equiv \left(\frac{1}{a}\right)^r \pmod{p}$, och man kan införa negativa digniteter i kongruensteorien. Talen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p-1}$ äro kongruenta med varsitt av talen $1, 2, \ldots, p-1$, ty vore $\frac{1}{r_1} \equiv \frac{1}{r_2} \pmod{p}$, måste, som man finner vid mult. med $r_1 \cdot r_2$, $r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$. Följaktligen är

$$1^{-r} + 2^{-r} + \ldots + (p-1)^{-r} \equiv 1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r \pmod{p},$$

d. v. s. r kan i vår sats förutsättas $\geqq 0$, om man så vill.

Hjälpsats 2. Kongruensen $P_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$, *där* $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, *ett polynom med heltalskoefficienter,* $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, *kan ha högst n modulo p inkongruenta lösningar.* Satsen är självklar för $n \geqq p$, den är vidare ovan bevisad för $n = 1$. Antag, att den är riktig för $1, 2, \ldots, n < p-1$; då är den riktig även för $n+1$ och

således allmänt giltig. Hade nämligen

$P_{n+1}(x) = a_0 x^{n+1} + \ldots + a_{n+1} \equiv 0 \pmod{p}$, $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, $n+2$ inkongruenta lösningar $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$, skulle

$$P_m(x) = P_{n+1}(x) - a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p},$$

varest nödvändigt $m \leqq n$, ha de $n+1$ inkongruenta lösningarna $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, vilket, då vår sats gäller för $n=m$, är omöjligt, såvida ej $P_{n+1}(x)$ term för term mod. p överensstämmer med $a_0(x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})$ d. v. s. $P_{n+1}(x) \equiv 0 \pmod{p}$ är samma kongruens som $a_0(x-x_1)\ldots(x-x)_{n+1} \equiv 0 \pmod{p}$. Men då är x_{n+2} icke en lösning.[1] Vi komma alltså till en motsägelse, om vi utgå från att satsen icke gäller för $n+1$.

För att nu bevisa vår sats kunna vi antaga $r \geqq 0$[2] och $r = k(p-1)+\varrho$, $0 \leqq \varrho < p-1$. Då är enligt Fermats sats

$$a^r = a^{k(p-1)+\varrho} = (a^{p-1})^k \cdot a^\varrho \equiv 1 \cdot a^\varrho,$$

således

$$1^r + 2^r \ldots + (p-1)^r \equiv 1^\varrho + 2^\varrho + \ldots + (p-1)^\varrho \pmod{p},$$

som för $\varrho = 0$ ger

$$1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

och således utgör beviset för satsens senare del.

Om $\varrho > 0$, då $p > 2$, finnes ett tal a, som ej satisfierar $x^\varrho - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ [d. v. s. $a^\varrho - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$] och $\not\equiv 0 \pmod{p}$, ty det finnes åtminstone $p-\varrho > 1$ inkongruenta tal, som ej satisfiera $x^\varrho - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. (Hjälpsats 2).

För ett sådant tal erhåller man som ovan för $a=2$, $\varrho=2$ ur kongruenserna

[1] Om $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$, är $ab \not\equiv 0 \pmod{p}$, ty $ax \equiv 0 \pmod{p}$ har endast lösn. $x \equiv 0$.

[2] Om r är negativt, blir k negativt, men slutsatserna desamma, då för $k > 0$ $a^{-k(p-1)} \equiv \left(\frac{1}{a}\right)^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ enligt Fermats sats, så snart a $\left(\text{och } \frac{1}{a}\right) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

(A) $a^\varrho[(1^\varrho+2^\varrho+\ldots+(p-1)^\varrho] \equiv (a\cdot 1)^\varrho+(a\cdot 2))^\varrho+\ldots+$
$+[a(p-1)]^\varrho \equiv 1^\varrho+2^\varrho+\ldots+(p-1)^\varrho \pmod{p}$,

varav

$$(a^\varrho-1)[1^\varrho+2^\varrho+\ldots+(p-1)^\varrho] \equiv 0 \pmod{p}$$

och

$$1^\varrho+2^\varrho+\ldots+(p-1)^\varrho \equiv 1^r+2^r+\ldots+(p-1)^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

v. s. b. *X.*

52) *Att finna alla en- och tvåsiffriga hela tal, som satisfiera ekvationen* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, *så att i varje fall de tre talen* x, y *och* z *ej alla hava någon gemensam faktor.*

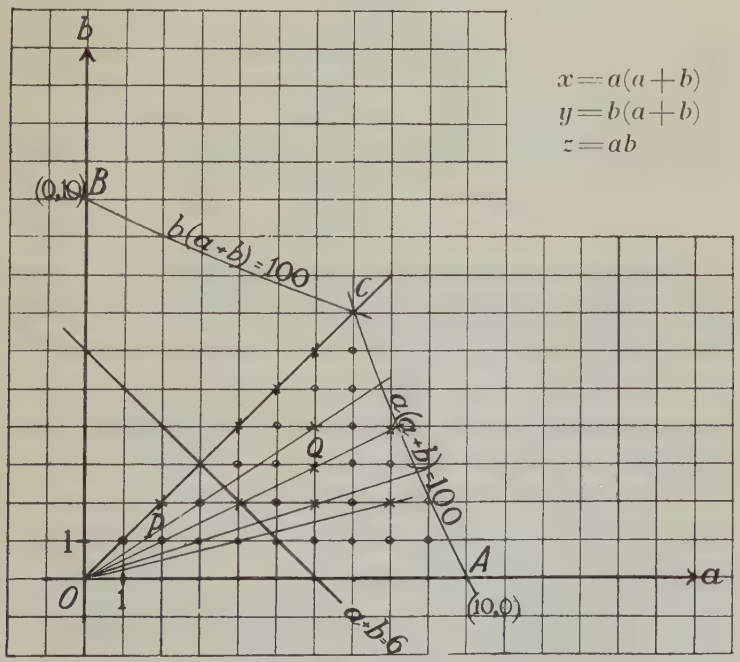
Man har $z=\frac{xy}{x+y}$. Sätt $x=a\cdot\delta$, $y=b\cdot\delta$, där a, b, δ äro hela positiva tal och dessutom a, b relativt prima (sakna gemensam divisor $\neq 1$). Då blir $z=\frac{ab\delta}{a+b}$, som skall vara ett pos. helt tal. Då $a+b$ ej har någon faktor $\neq 1$ gemensam med vare sig a eller b (ty i motsatt fall skulle även a och b ha en gem. faktor $\neq 1$ mot antagandet), måste $\delta=k(a+b)$, där k är ett pos. helt tal. $x=ka(a+b)$, $y=kb(a+b)$, $z=kab$ är således den allmänna lösningen i positiva hela tal. Nu tillkomma villkoren:

1) x, y, z skola sakna gemensam faktor $\neq 1$,
2) x, y, $z<100$.

Ur 1) följer $k=1$; *lösningen är alltså* $x=a(a+b)$, $y=b(a+b)$, $z=ab$ *med villkoren* 2) $a(a+b)<100$, $b(a+b)<100$. ($ab<100$ är en följd av dessa), *där* a, b *äro positiva hela tal utan gemensam faktor* $\neq 1$.

Om man i ett a-b-plan intecknar linjerna OA: $b=o$, OB: $a=o$ och hyperbelbågarna AC: $a(a+b)=100$, BC: $b(a+b)=100$ inses, att de möjliga värdena på a och b äro koordinaterna för de punkter med rel. prima heltalskoordinater (s. k. gitterpunkter), som ligga inom kurvan $OACBO$. Man räknar 43 sådana punkter: 1 på symmetri-

linjen OC och 21 inom vardera av de kongruenta hälfterna av området (i fig. inom $OACO$ utmärkta med o). Mer systematiskt kan man beräkna lösningarna sålunda: $a+b=k$ kan taga värdena 2, 3, 4 ..., 14. För $k=2, 3 \ldots, 10$ kan man för varje k låta a genomlöpa de $\varphi(k)$ hela positiva tal $<k$, som ej ha någon annan faktor än 1 gemensam med k. Detta ger $\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(10)=1+2+2+4+2+6+4+6+4=31$ lösningar. För $k=11$ duga av de $\varphi(11)$ endast $a=2, 3, \ldots, 9$ d. v. s. 8 värden, för $k=12$ endast $a=5, 7$ d. v. s. 2 värden, för $k=13$ endast $a=6, 7$ d. v. s. 2 värden, för $k=14$ duger intet av de $\varphi(14)$ a-värdena, allt till följd av begränsningen till området. Inalles blir antalet lösningar således $31+8+2+2=43$.



$x=a(a+b)$
$y=b(a+b)$
$z=ab$

Man kan anmärka, att på varje halvstråle OQ, som innehåller en gitterpunkt inom området, endast den gitterpunkt P, som ligger O närmast motsvarar lösning.

(Även löst av *C. H.*) *X.*

53) *I en spetsvinklig triangel är summan av avstånden från vinkelspetsarna till höjdernas skärningspunkt lika med summan av de inskrivna och omskrivna cirklarnas diametrar.*

Betecknas de ifrågavarande avstånden med k, l och m, erhålles

1) $$\left.\begin{aligned} k\cos\beta &= l\cos\alpha \\ k\cos\gamma &= m\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

2) $$a = l\sin\gamma + m\sin\beta = k\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha} + k\frac{\cos\gamma\sin\beta}{\cos\alpha} = k\operatorname{tg}\alpha.$$

Sål. $$k = a\operatorname{cotg}\alpha.$$

På samma sätt fås $$l = b\operatorname{cotg}\beta$$

$$m = c\operatorname{cotg}\gamma.$$

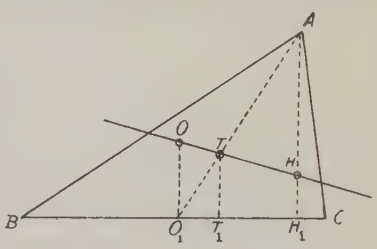
Alltså

$$k+l+m = a\operatorname{cotg}\alpha + b\operatorname{cotg}\beta + c\operatorname{cotg}\gamma = \text{(då } \alpha = 2\varrho\sin\alpha \text{ etc.)}$$

$$= 2\varrho(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 2\varrho\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\varrho + 2r. \qquad (C.\ H.)$$

Om man i en triangel projicierar omskrivna cirkelns medelpunkt O, tyngdpunkten T och höjdernas skärningspunkt H på en av triangelns sidor vilken som helst, t. ex. BC, i resp. O_1, T_1, H_1, ligger tydligen alltid T_1 mellan O_1 och H_1 och $O_1T_1 : T_1H_1 = 1 : 2$. Vid proj. på AC erhållas O_2, T_2, H_2 med motsvarande läge. T är skärningspunkten mellan normalerna TT_1, TT_2 mot BC, AC i T_1, T_2 resp. Dessa råka bägge linjen OH i den entydigt bestämda punkt T mellan O och H, som delar OH i förh. 1 : 2.



Alltså ligga O, T, H i rät linje (Eulerska linjen). Därav följer vidare på grund av likformighet mellan trianglarna AHT och O_1OT, att $AH = 2OO_1$ o. s. v., hvarmed uppgiften

är återförd på ex. 46. Uppgift 53 bör formuleras exaktare i överensstämmelse med ex. 46 för att vara fullt riktig.

X.

54) *På ena gavelväggen till en låda av dimensionerna* $10^m \cdot 1^m \cdot 1^m$ *sitter en fluga* $0{,}1^m$ *från bottnen och på lika avstånd från kvadratens båda vertikala sidor. På den motsatta gavelväggen är fästad en sockersmula* $0{,}1^m$ *från lådans övre botten och likaledes på samma avstånd från kvadratens vertikala sidor. Hur lång är den kortaste väg som flugan behöver tillryggalägga för att nå sockersmulan?*

Detta problem är något tvetydigt formulerat: Antingen a) är det fråga om den kortaste linjen som får passera tre av sidoväggarna och den ena bottnen, eller b) den kortaste linje som endast passerar sidoväggarna. a) inträffar antingen om flugan och sockersmulan befinna sig inuti lådan (flygning naturligtvis utesluten), eller om de befinna sig utanpå lådan, men denna antingen är försedd med lock eller upphängd så, att flugan kan krypa under bottnen. b) inträffar om de befinna sig utanpå lådan och denna är utan lock och står på ett underlag.

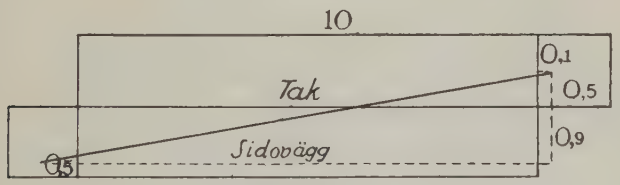


Fig. a.

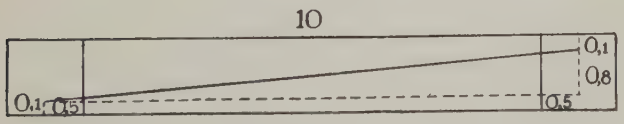


Fig. b.

Lätt inses, att den tillryggalagda vägen i båda fallen blir en rät linje, om lådans sidor utbredas i ett plan, såsom

i vidstående figurer a) och b). I de olika fallen erhålles

a) $v = \sqrt{(0{,}5+10+0{,}1)^2+(0{,}5+0{,}9)^2} = \sqrt{114{,}32} = 10{,}692$

b) $v' = \sqrt{(2\cdot 0{,}5+10)^2+(0{,}8)^2} = \sqrt{121{,}64} = 11{,}029$

(Löst av *X*.)

Meddelande från Redaktionen.

Då det visat sig att, trots tidskriftens ökade spridning, lösarna av problemen dock blivit allt färre, så tillåter sig red. att anhålla hos hrr lärare i läroverkens högsta klasser, att de måtte för lärjungarna påpeka de problem som lämpa sig för dessa och uppmana dem att insända lösningar; samt själva bidraga med lösningar till de svårare uppgifterna. *Redaktionen.*

Om geometriundervisningen i realskolans 4:e klass.[1]

Av J. S. HEDSTRÖM.

Som bekant börjar geometriundervisningen vid de allmänna läroverken i tredje klassen med en s. k. förberedande kurs. Målet för denna är att göra eleverna förtrogna med de geometriska fundamentalbegreppen. Och är läraren intresserad för denna del av undervisningen och lägger ned arbete därpå, så når han också detta mål. Men han vinner ock en annan sak, som ej är av mindre vikt, nämligen att väcka elevernas intresse för geometri. Att detta verkligen är fallet tror jag, att varje lärare, som undervisat i klassen och lagt sin undervisning något så när förnuftigt, kan bekräfta.

Ja, så långt är allt gott och bra, men — sedan komma vi till fjärde klassen. Där börjar den egentliga geometriundervisningen och hur går det då. Kan man nu hålla intresset hos eleverna uppe, kan man öka och fördjupa det? Svaret på denna fråga kan naturligtvis utfalla olika. Det kan inte förnekas, att många lärare utföra ett gott arbete och ernå resultat, som förtjäna allt erkännande. Men jag är rädd för, att man i allmänhet och i stort sett måste besvara frågan med nej. Det går nog att få eleverna att arbeta, att lära sig satsers lydelse och bevisen för dem o. s. v., men själva det inre, bärande intresset, det som yttrar sig i vetgirighet, i arbetslust och arbetsglädje, det försvinner för de flesta, och då blir geometrien tråkig och svår och arbetets resultat av föga värde. Symptomen visa sig på olika sätt. En pojke kommer fram till

[1] Efter tvenne föredrag för lärarekandidater ht. 1919.

tavlan och skall redogöra för ett bevis, men figuren stämmer ej alldeles med den han sett förut eller den som står i läroboken. Det går inte. Eller kanske äro bokstäverna placerade på annat sätt än i boken, eller kanske finns det ej alls några bokstäver vid figuren på tavlan, men beviset tages med bokstäver precis så, som det står i läroboken. Det har blivit en katekesläxa av det hela; begripandet är borta och det känner pojken. Det gör honom modlös och försagd och kväver hans intresse. Det arbete han nedlägger — och det är ofta avsevärt — kan knappast betecknas som väl använt.

För min del tror jag, att geometriundervisningen i realskolans 4:e och 5:e klasser är den minst lyckade delen av hela den matematiska undervisningen vid våra läroverk. Det är nästan som om området varit fridlyst, avstängt från de modernare idéer i undervisningskonsten, som eljest slagit igenom.

Geometriundervisningen på detta stadium i Sverige och utomlands svänger i våra dagar mellan två ytterligheter. Den ena, den traditionella euklidesundervisningen, har länge behärskat undervisningen såväl i Sverige som i många andra länder framförallt i England och Italien. Undervisningen är strängt systematisk. Man börjar med definitioner, postulat och axiom och ur dessa härledes allt det följande med logisk stränghet.

Den motsatta ytterligheten, den rent praktiska geometriundervisningen, representeras främst av engelsmannen John Perry. Undervisningen grundas uteslutande på iakttagelser och experiment, på teckning och mätning. Alla frågor, som endast ha abstrakt intresse, lämnas helt åsido.

Det kan inte förnekas, att Perryrörelsen, vilken tillvunnit sig stort intresse och många anhängare, har berättigande såsom reaktion mot den nyssnämnda traditionella och dogmatiska, ofta mekaniserade och sterila euklidesundervisningen. Och säkert är, att den givit fart åt de reformsträvanden i praktisk riktning i fråga om denna undervisning, som nu pågå i de flesta kulturländer. Å

andra sidan synes det mig, som om Perryrörelsen skattade allt för mycket åt den rena nyttighetssynpunkten. Den underkänner värdet av den formella bildning och skolning, som geometriundervisningen kan giva. Sammanhanget och översikten, det vetenskapliga systemet, komma ej heller till sin rätt.

Mellan dessa båda ytterligheter finnas många mellanformer, och åsikterna om den lämpligaste lärogången divergera i hög grad. Vår kursplan och dess metodiska anvisningar, vilka ju måste vara mera allmänt avfattade, taga emellertid avstånd från båda ytterligheterna. Å ena sidan heter det nämligen att de s. k. axiomens antal kan ökas och att bevisföringen kan inskränkas till sådana satser, i fråga om vilka lärjungen kan anses känna behov av bevis. Å andra sidan: från de genom definitioner och axiom givna förutsättningarna bör bevisföringen vara sträng.

Jag övergår nu att framhålla några synpunkter på geometriundervisningen i fjärde klassen. Först då en *historisk synpunkt.* Geometrien har empiriskt ursprung. Den är skapad av praktiskt folk, lantmätare, astronomer o. s. v. Den är sålunda från början en experimentell vetenskap. Nu säger man, att lärogången bör i någon mån avspegla den historiska utvecklingen. Och detta tror jag beträffande geometriundervisningen innehåller moment, värda att taga fasta på. Men därvidlag räcker det ej att endast i tredje klassen — en eller i bästa fall två veckotimmar under en termin — sysselsätta sig med praktiska övningar. Eleverna äro icke mogna att vid övergången till fjärde klassen göra ett tvärt hopp från den experimentella till den logiska lärogången. Utvecklingen bör ske kontinuerligt och med mjuka övergångar. Det är först så småningom som det går upp för eleverna, att det finns en metod, som är att föredraga framför den direkta uppmätningen. Och det kräver lång tid innan de lära sig inse behövligheten och nyttan av ett logiskt bevis och innan de bliva förtrogna med ett sådant. Övergångstiden bör efter min mening sträcka sig över hela fjärde klassen och kanske ännu längre.

Jag skulle vilja på ungefär följande sätt formulera denna synpunkts tillämpning på geometriundervisningen i klass 4: *Varje sats bör erhålla ett konkret, påtagligt och för eleverna fullt fattbart underlag genom ritning och mätning.*

I denna formulering ligger ock såsom redan antytts en *psykologisk synpunkt* av vikt innesluten. Tolv- och trettonåringar leva ännu i de konkreta föreställningarnas värld. Abstraktioner äro dem i regel främmande, logiska deduktioner likaså. Hur logiskt skarpsinnigt en geometrisk sats än bevisas, linjalens och tumstockens och passarens utsagor bliva dock för dem det i sista hand utslagsgivande och avgörande. Det kan ej passa för detta åldersstadium med dess verklighetssinne och starka begär efter självverksamhet med ett framställningssätt av helt teoretisk och abstrakt läggning. Undervisningen blir då — åtminstone för flertalet elever — svårbegriplig, intressedödande och ofruktbar. Eleverna liksom känna sig leva i en artificiell, i en för dem främmande värld. Nej, *undervisningen måste avpassas efter elevernas intellektuella mogenhetsgrad, efter deras förmåga och behov.*

Jag kommer så till en *praktisk synpunkt.* Geometrien bör ge kunskap, som är praktiskt värdefull. Nu är det ju så — och detta gäller i betydligt vidare omfattning än blott geometrien — att de problem, som möta oss i livet, ytterst sällan äro identiska med dem vi behandlat i skolan. En dogmatisk kännedom om ett systems lärosatser kan väl vara av stor nytta, men denna kunskap allena kan ej hindra, att vi stå handfallna inför den ena eller andra praktiska uppgiften, även om den är av enkelt slag. Det ligger därför vikt uppå, att lärjungen i skolan lärt sig arbeta på egen hand och fått en smula förtroende till sin egen förmåga. Han bör göras förtrogen med hur man skall gripa sig an med lösningen av en uppgift, och uppgifterna böra ställas så, att han verkligen kan taga ett steg på egen hand. Hans fantasi- och initiativförmåga bör uppövas. Han skall genom att iakttaga och draga slutsatser skaffa sig en i någon mån självständig åsikt och uppfattning.

Vi skola uppfostra våra elever ej endast till självkritik utan också till självtillit. Med andra ord: *kunskapen i och för sig är viktig, men lika viktig, ja kanske än värdefullare, är sättet, hur den inhämtats.* Denna synpunkt har i våra svenska läroböcker i geometri knappast beaktats. Euklides själv lämnar i sina Elementa satserna i slutgiltig form. Han ger ingen antydan om på vilken väg eller i vilken ordning han och hans föregångare funnit dem. Boken är ju ej heller skriven såsom lärobok för pojkar.

Jag övergår nu att lämna några riktlinjer för hur jag tänker mig, att nyss berörda synpunkter skola tillämpas vid geometriundervisningen i fjärde klassen. Och jag stöder mig härvid på den erfarenhet, som jag vunnit genom att undervisa i denna klass ett flertal gånger de senare åren. Först som sist vill jag då säga, att jag håller på den Euklideiska anordningen på så sätt, att undervisningen bör utmynna eller samlas i ett relativt ringa antal självständiga och fullständigt utförda lärosatser, avsedda att efter hand av eleverna inläras. En numera i vårt land rätt allmänt gjord erfarenhet talar för, att man inte med användande av läroböcker med mera sammanhängande och flytande framställning med ofta en mångfald viktiga och oviktiga satser medtagna och jämställda med varandra kan ernå den *fasthet, säkerhet och koncentration i elevernas kunskap*, som visat sig vara av så stor vikt för den fortsatta undervisningen i detta ämne. Att giva eleverna få, men säkra hållpunkter för sin kunskap, det är av avgörande betydelse för all undervisning. Insikten om, att dessa lärosatser fogas, den ena till den andra, så att det hela bildar ett logiskt sammanhängande system, denna insikt kommer så småningom.

Undervisningen måste ock ge *verklig kunskap*, en inblick i och ett förstående av det sakförhållande, som orden uttrycka. Det får inte bli tomma ord utan innehåll. Och för att nå detta mål ha vi ingen säkrare metod att tillgripa än åskådningen. Men denna kan användas på många olika sätt. Läraren kan säga så här — jag väljer som exempel

Eukl. I: 5 — I en likbent triangel äro basvinklarna lika stora. Så ritar han upp noggrant eller på fri hand, en likbent triangel på tavlan och säger: Ja, ni ser att det stämmer. Kanske låter läraren i stället en elev rita upp figuren på tavlan eller kanske ritas ej alls någon figur på tavlan, utan läraren säger: Rita upp en likbent triangel i edra figurböcker och se efter, om det stämmer. Detta är redan efter min mening en betydlig förbättring. Nu ligger nästa steg nära till hands. Man talar inte om hur satsen lyder, utan ställer uppgiften så: Vi skola nu undersöka och jämföra vinklarnas storlek i en likbent triangel. Så få eleverna, var och en för sig, rita upp olika likbenta trianglar, kanske först en efter av läraren uppgivna mått, så en eller flera av eleverna godtyckligt valda. För var och en triangel mätas och uppskrivas vinklarnas storlek. Sedan få eleverna själva draga slutsatsen och själva uttrycka den i ord.

Jag skulle med andra ord vilja lägga stor vikt vid geometriens experimentella sida, vilja behandla den på detta stadium som en naturvetenskap och på den tillämpa de metoder, som nu för tiden på detta undervisningsområde visat sig så fruktbringande. Grundvalen här är den, att »endast den kunskap är fullt levande och fullt personligt tillägnad, som är vunnen genom självständigt arbete».

Alltså, vi böra låta teoremen föregås av uppgifter, icke formulerade såsom påståenden, vilka skola bevisas, utan såsom undersökningar och experiment, vilka skola självständigt utföras och behandlas av varje elev. Att därvid de flesta eller alla komma till samma resultat ökar för eleverna avsevärt slutsatsens allmängiltighet. Detta blir en verkligt hevristisk metod, ett sökande och finnande av samtliga elever. Och geometrien har härvid ett bestämt företräde framför fysiken, kemien och biologien. Inga laboratorier och inga mer eller mindre dyrbara apparater äro behövliga. Allt som erfordras är figurbok, passare, graderad linjal och gradskiva.

Nu väntar jag mig åtskilliga invändningar. Först

denna: inte kan man bygga geometrien på åskådningen; den för ju så ofta på villospår. Först skulle jag härtill vilja säga, att man ej kan underlåta att sammanknyta geometrien med åskådning. Man har sagt, att geometri är en kemisk förening mellan åskådning och logik. För oss äldre är geometrien knuten vid minnesbilder; för barnen måste den först knytas vid konkreta bilder. Att åskådning och experiment ibland leda vilse är sant. Och det gäller ej enbart för skolpojkar, det gäller t. o. m. för de mest banbrytande forskare. Det är ingen olycka, snarare tvärtom. Det ger rikedom och spänning, intresse och forskningslust. All mänsklig strävan leder på irrvägar mot ljuset. Övervunna svårigheter ge resultatet ökat värde.

Så en annan invändning. Åskådningen hindrar den logiska deduktionen. Även skolgeometrien bör vara en logisk vetenskap. Den sistnämnda satsen accepteras, fastän som ovan nämnts många pedagoger nu för tiden förkasta den. Men den förra satsen bestrides. Den historiska synpunkten visar, att utvecklingen har gått från de enskilda fakta till översikter och system, från det empiriska till det logiska. Den psykologiska synpunkten ger vid handen, att barnen ej omedelbart äro vuxna en logisk deduktion. Jag vågar påstå, att åskådningen tvärtom bereder väg för och underlättar den logiska deduktionen. I fjärde klassen bör man nämligen i regel ej stanna med att på experimentell väg ha funnit en sats, så som man gjorde i tredje klassen. Man bör fastmer försöka få eleverna att knyta ihop den med förut genomgångna satser. Och på så sätt motivera, d. v. s. härleda ett bevis för densamma. Men teorien bör utgå från åskådningen; det induktiva tänkandet bör vara en föregångare till och en förberedelse för det logiska. Och den erfarenhet jag vunnit talar bestämt för, att elevernas genom eget arbete vunna förtrogenhet med satsens verkliga förutsättningar och innehåll underlättar bevisets finnande och bevisets förstående. Det har många gånger hänt mig, att innan det blivit fråga alls om ett bevis, så har en eller annan elev sagt ungefär så här: Det där

kunde man förstå utan att mäta. Jag tror att man då är inne på rätt väg. Eleverna, den ene efter den andre, börja intressera sig för detta, att man kan komma fram utan att mäta, att det finnes en säkrare och pålitligare metod än mätningen, vilken senare blott ger ungefärliga resultat, ibland leder vilse och alltid blott kan omfatta ett fåtal undersökta fall. De börja leta efter grunden och orsaken till att det blir på det ena eller andra sättet och så växer den logiska synpunkten organiskt och naturligt fram under rena åskådningen.

*

Inlägg i denna viktiga fråga mottagas med tacksamhet.

Redaktionen.

Härledning av tangentteoremet och mollweideska formlerna.

Av GUSTAF LINDBORG.

A. Tangentteoremet.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

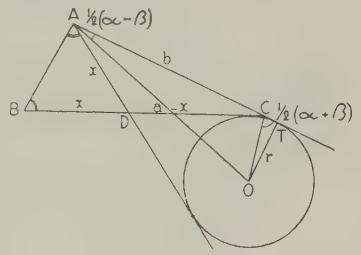


Fig. 1.

Bevis: Given är $\triangle ABC$ med sidorna a, b och c och vinklarna α, β och γ vid resp. spetsar A, B och C. Antag $\alpha>\beta$ och avsätt vid A en $\angle BAD=\beta$ samt konstruera den utantill inskrivna cirkeln O till $\triangle ADC$, vilken cirkel må tangera sidan AC uti T. Övriga beteckningar inses av fig. 1.

Då fås omedelbart enligt figuren, att

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{r/CT}{r/AT}=\frac{AT}{CT}=\frac{\frac{1}{2}(x+a-x+b)}{\frac{1}{2}(x+a-x+b)-b}=\frac{a+b}{a-b},$$

emedan AT tydligen är lika med halva omkretsen till $\triangle ADC$.

B. Mollweideska formlerna.

Vi utgå från samma konstruktioner (se fig. 1) som vid härledningen ovan av tangentteoremet samt beteckna den utantill inskrivna cirkelns tangeringspunkter med T_a, T_b och T_x; vidare sammanbindes O med B och D, och OD må skära AB i E (se fig. 2). Övriga beteckningar inses av figuren.

Hjälpsats 1. Fyrsidingen ABOC är ett cirkeltrapetsium.

Bevis: $\wedge OAC + \wedge OCA = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \gamma.$

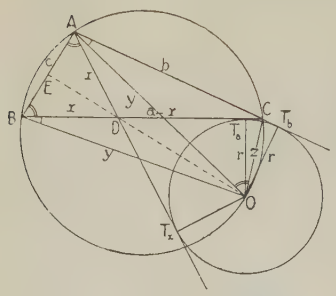


Fig. 2.

Alltså blir den uti $\triangle AOC$ återstående $\wedge AOC = \beta$, på grund varav inses, att en cirkel kan omskrivas kring fyrsidingen *ABOC*.

Hjälpsats 2. Linjerna OA och *OB äro lika stora.*

Bevis: Emedan bissektrisen *OD* till tangenterna DT_a och DT_x är bissektris även till toppvinkeln *ADB* uti den likbenta $\triangle ADB$, så blir tydligen *ODE* mittpunktsnormal till sidan *AB*, varav omedelbart följer, att $OA = OB$.

Mollweideska formeln I:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Bevis: $OA \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = AT_b = \frac{1}{2}(a+b);$

$$OA \cdot \sin\tfrac{1}{2}\gamma = OA \cdot \sin\tfrac{1}{2} \wedge AOB = \tfrac{1}{2}c.$$

Genom division fås omedelbart formeln I ovan.

Mollweideska formeln II:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}.$$

Bevis: Emedan *ABOC* är ett cirkeltrapetsium, så fås enligt *Ptolemeiska satsen*, att

$$BC \cdot AO = AC \cdot BO + AB \cdot CO,$$

d. v. s. $$a \cdot y = b \cdot y + cz,$$

varav $$(a-b)y = cz.$$

Alltså $$\frac{a-b}{c}=\frac{z}{y}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

emedan $$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\gamma=90°.$$

Anm. 1. Det är naturligtvis likgiltigt, om man tager $\frac{z}{y}$ (enligt sinusteoremet) ur $\triangle OBC$ eller ur $\triangle OAC$; i senare fallet skulle man uti tredje bråkets nämnare ha fått: $\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\gamma]$, som ju dock är $=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, alldenstund $[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\gamma]+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Anm. 2. Tydligen äro enligt *Hjälpsats 1* de rätvinkliga trianglarna OBT_a och OAT_b kongruenta, varav följer, att *tangenterna från A och B bli lika stora*, ävensom att avstånden från A och B till samma cirkels medelpunkt bli lika stora, vilket allt givetvis kan inses även på annat sätt.

Glödelektriska förstärkningsrör.

Av RAGNAR HOLM.

I.

§ 1. *Inledning.*

Problemet att utan deformation förstärka svaga sinusformade växelströmmar fick ungefär vid tiden för världskrigets utbrott en tillfredsställande lösning, och lösningen bragtes, tack vare krigarnas behov att uppfatta svaga elektriska signaler, ytterligt hastigt till en mycket hög teknisk fulländning. En stor mängd vetenskapsmän och ingeniörer medverkade härvid. Rätt intressant är, att rena vetenskapsmän utförde huvudarbetet. Detta berodde dels på att problemet i fråga låg synnerligen väl till för vetenskapligt grundlig behandling, dels också på krigets makt att taga alla i anspråk.

Angående uppfinningens historik hänvisa vi för övrigt till § 8 av denna uppsats.

De moderna förstärkningsrören äro, som sagt, de allra sista årens barn. De ha inte ens hunnit försäkra sig om ett allmänt antaget namn. Väl värd att komma i internationellt bruk torde emellertid den av Langmuir föreslagna benämningen *pleiotron* vara. Detta ord är bildat av det grekiska stamordet pleion - mer och ändelsen tron, densamma, som förekommer i elektron och som här skall ex analogia ange, att det är fråga om ett fysikaliskt instrument. Ordet betyder alltså just förstärkare.

Vi gå nu att beskriva pleiotronen i dess allmännaste form jämte dess funktion. Vi få därvid tillfälle visa, huru genom uppfinningen av pleiotronen flera för radiotelegrafien och -telefonien synnerligen viktiga problem blivit lösta man kan nästan säga på idealt sätt. Paragraferna 1—5 bilda

i viss mån ett helt för sig, som kompletteras av §§ 6—9. Dessa sista kunna därför eventuellt förbigås av en läsare med mindre ingående intresse.

§ 2. *Pleiotronen som förstärkare av inkommande växelströmmar.*

En pleiotron i sin enklaste form är avbildad i fig. 1. *P* är ett tillsmält möjligast fullständigt evakuerat glaskärl, så stort som en liten glödlampa. *K* är en wolframtråd

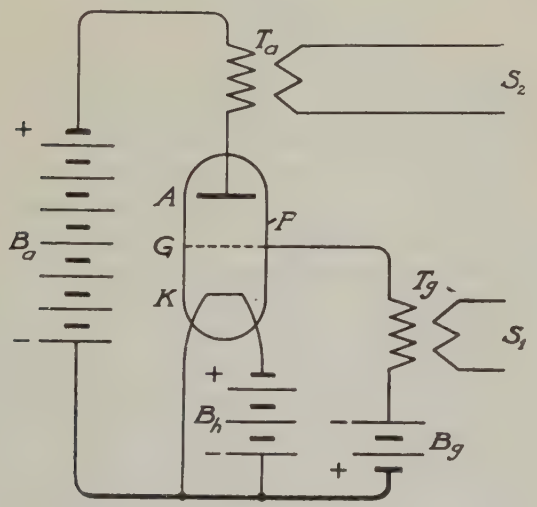


Fig. 1.

(av samma slag som glödlamptrådarna), som genom ström från batteriet B_h kan upphettas till vitglödning. Den förmår därvid[1] avgiva elektroner, vilka kunna föras bort av ett lämpligt fält och sålunda konstituera en ström. Ett sådant fält kommer till stånd genom samverkan av laddningarna på *anoden A* och *gallret G*. *A* får gentemot *K* med hjälp av batteriet B_a rätt starkt positiv medelpotential. *G* kan, som vi få se, lämpligen arbeta med en något

[1] Jfr. en uppsats av förf. i denna tidskrift, s. 88, 1919.

negativ medelpotential gentemot K. Denna potential bestämmes av batteriet B_g.

Fig. 2 visar i något schematiserande form en ofta förekommande typ av pleiotroner. Man ser inuti röret P två anodskivor A omgivande en glasram R. Över denna

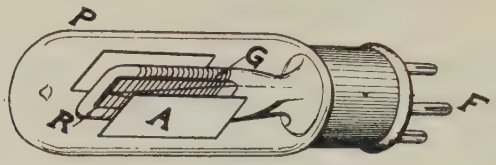


Fig. 2.

är en metalltråd lindad, så att den på vardera sidan om ramen bildar ett galler G. Emellan de båda gallren synes den V-formigt utspända glödtråden. Tilledningarna till K, G och A äro förbundna med kontaktstift i sockeln F.

Som sagt har A positiv medelpotential gentemot K. Den skulle föranleda ett starkt fält kring K, som skulle från denna utsuga mättnadsström[1], om icke A-fältet till större delen avskärmades genom G. G får ju nämligen en låg potential gentemot K. Lämpligt är, som vi få se, att G icke övertager någon del av elektronströmmen från K. Så blir fallet, om G:s potential ständigt hålles negativ. Ty negativa G-trådar stöta bort elektronerna, som komma från K, så att dessa dels vända om framför G:s trådar, dels slå in på banor, som genom G:s maskor föra till anoden. Härvid är förutsatt, att G-fältet ej förmått helt avskärma den elektronerna sugande kraftverkan kring K, vilken A:s laddning framkallar. Om man bara väljer anodspänningen tillräckligt stor, kan man arbeta med negativt galler utan förlust av förstärkningsförmågan. I praktiken är det visserligen ofta värdefullt att kunna reda sig med tämligen lågspända batterier. Därav föranledas kompromisser vid valet av spänningen hos batteriet B_a och medelspänningen hos gallret[2].

[1] Jfr. den nämnda tidigare uppsatsen av förf.
[2] Jfr. § 9 här nedan.

Vi tänka oss nu, att en svag växelström inkommer genom ledningsparet S_1. Genom transformatorn T_g förändras denna till en än svagare ström men med högre spänningsamplituder. Detta är lämpligt, ty man vill ha möjligast stora spänningsvariationer hos *G*. Och *G* kan följa med relativt stora spänningsvariationer utan att behöva mer än en ytterligt svag strömtillförsel på grund av det förhållandet, att det ej mottager ström från *K*. *G* antager nästan så stora spänningsvariationer, som transformatorn skulle ge vid tomgång.

Samtidigt som potentialen varierar hos *G*, varierar dess förmåga att avskärma *A*-fältet kring *K*, ty det är ju klart, att *G* starkare avspärrar *A*-fältet, ju lägre *G*-potentialen är. Men ju mer *A*-fältet försvagas kring *K*, desto svagare blir den elektronström, som av samma fält suges från *K* genom *G*-maskorna upp till *A*. Vi förstå alltså, att variationerna hos *G*:s potential avbildas som en variation hos anodströmmen, vilken lagras över dennas medelvärde. Dessa sistnämnda variationer omsättas genom transformatorn T_a till en genom ledningen S_2 utgående växelström. Energien hos denna ström kan vara 100 till 1 000 gånger större än den energi, som insläppes i T_g genom S_1. Sekundärlindningen hos transformatorn T_a väljes så, att förhållandet mellan den utgående strömmens spännings- och styrkeamplituder passa för den ledning eller den telefon, som skall mottaga den förstärkta strömmen.

Sammanfattande kunna vi alltså beteckna pleiotronens verksamhet sålunda: En till gallret över T_g insänd svag primär växelström förmår styra anodströmmen och ge denna växlingar, som motsvara en växelström med betydligt mycket större energi än den primära strömmens.

§ 3. *Några anmärkningar.*

När man, som nu skildrats, arbetar med transformatorer (T_g och T_a), blir den sekundära strömmen i allmänhet ej en trogen avbild av den primära. Avbildningen blir

riktig blott i så måtto som de sinussvängningar, varav den primära strömmen kan tänkas sammansatt, få sina motsvarigheter i sekundärströmmen. Deformerad blir avbildningen, emedan fasförskjutning uppstår mellan dessa komponenter. Denna fasförskjutning är emellertid likgiltig för örat och skadar alltså icke det hörda ljudet. Den spelar därför ingen roll för den användning pleiotronen hittills fått i praktiken. På betingelserna för en fullt likformig avbildning skall här ej ingås.

Pleiotronens förmåga att avbilda sinusvågor upp till de högsta frekvenser, som praktiskt kunna komma i fråga, ytterst beror på följande omständighet: Det i pleiotronen av primärströmmen styrda mediet utgöres ju av de ytterligt lätta och hastiga elektronerna från K; och dessa kunna upp till oerhört höga frekvenser rätta sig synkront efter potentialväxlingarna hos G[1].

Genom att koppla flera pleiotroner i serie kan man uppnå oerhörda förstärkningar. Det är emellertid mycket svårt att hopbygga lämpliga apparater med flera pleiotroner i serie, emedan de då, tack vare sin ytterliga känslighet, gärna få förmågan att driva sig själva, så att den mottagande telefonen låter höra ett tjut, som överröstar de ljud, man vill höra. Man har för praktiskt bruk kunnat bygga förstärkningsanordningar med upp till 6 pleiotroner i serie. Genom att förstärka energien 10^8 till 10^9 gånger uppnådde Schottky hos Siemens & Halske i Berlin en sådan känslighet hos sina förstärkare, att de genom ett

[1] Barkhausen har på ett intressant sätt fått pleiotroner att generera mycket högfrekventa svängningar. Han gav gallret en positiv och anodplattan en negativ potential. Hos en sådan anordning uppstår enligt Barkhausens förklaring följande fenomen: Elektroner, som flyga genom gallrets maskor, tvingas av anodfältet att återvända utan att nå anoden. Eventuellt gå de ytterligare några gånger genom gallermaskorna. Slutligen upptagas de av det positiva gallret. I allmänhet uppstår emellertid (tack vare rumsladdningsverkningar) en viss taktfasthet i dessa rörelser, så att ena ögonblicket elektronströmmen mot anoden, andra ögonblicket den omvända strömmen överväger. I samma takt varierar den ström gallret erhåller. Barkhausen kunde visa att på detta sätt genererades strömväxlingen motsvarande en våglängd på omkring 1 m. Dessa ytterst högfrekventa svängningar ange var övre gränsen är att söka för de frekvenser en pleiotron kan följa. Den övre gränsen torde motsvara våglängden på några meter.

ljud i telefonen gåvo till känna den ojämnhet i den första pleiotronens ström, som härrörde från den omständigheten, att strömmen ju konstitueras av elektroner, vilkas antal enligt vissa sannolikhetslagar något variera från ögonblick till ögonblick. Den primära växelströmenergien var därvid ungefär 10^{-15} watt.

§ 4. *Pleiotronernas användning inom tekniken.*

Inom telefontekniken kunna pleiotronerna användas vid mottagningsapparaterna för att förstärka det ankommande ljudet. Viktigare är att man lyckats göra med pleiotroner arbetande anordningar, som, insatta mitt på en långlinje, förstärka de dem från båda sidorna passerande telefonströmmarna.[1] Sådana förstärkningsapparater, stationerade i Malmö och Stralsund, verka uti den nya telefonförbindelsen Stockholm—Berlin. Med hjälp av dylika apparater funktionerar i Amerika en telefonförbindelse mellan New-York och San Francisco med en längd av omkr. 5 400 km.

Inom radio-telegrafien och -telefonien ha pleiotronerna inlett ett helt nytt skede. Det är ju bekant, att man inom radiotelegrafien arbetar enligt två rätt väsentligt olika metoder: 1. metoden med s. k. ljudande gnistor; 2. metoden med s. k. odämpade vågserier.

Enligt den första metoden genererar man gnistor i en takt, som motsvarar en för örat väl hörbar ton, och varje gnista får sätta i gång en liten serie högfrekvensvågor med avtagande amplitud. Till varje punkt eller streck i morsealfabetet hör en serie gnistor.

Enligt den andra metoden genererar man för varje morse-punkt eller -streck blott en serie högfrekventa vågor, alla med samma amplitud. Tack vare att dessa vågserier äro längre än de förra och hela tiden behålla sin maximalamplitud, ha de betydligt större förmåga att arbeta upp

[1] Angående byggnaden och teorien för en sådan koppling hänvisas intresserade till en uppsats av förf. i Teknisk bilaga till Kgl. Telegrafstyrelsens cirkulär, 1918, sid. 81.

mottagaren till resonanssvängningar. Man kan också avstämma resonansen skarpare, varmed bland annat följer den ofantliga fördelen av höggradig störningsfrihet.

Denna sista metod har länge stått som ett ideal för radiotelegrafien, men man lyckades länge ej realisera den. Rätt långt på väg mot realiseringen nådde visserligen dansken Valdemar Poulsen med sin svängningsgenererande ljusbåge. Men enligt Poulsens system måste varje station lägga beslag på ett alltför stort frekvensområde. Då kom slutligen uppfinningen av pleiotronen och därmed erhöll tekniken ett instrument, som befanns på förträffligaste sätt möjliggöra en allsidigt elegant utbildning av metoden med »odämpade» vågserier. Pleiotronen blev använd både som generator och som en huvuddel av mottagaren.

Som generator kommer den för närvarande i fråga visserligen blott för svagare stationer. Sändaranordningen med pleiotroner är mycket lätthandterlig. De mycket starka stationerna arbeta med långa vågor (10 000 till 20 000 m.), vilka man på billigaste sätt lyckats generera i högfrekvensmaskiner. Poulsenbågarna ge ej så konstant frekvens som kan uppnås med maskin- och pleiotronsändare. En god högfrekvensgenerator har konstruerats av vår i U. S. A. verksamme landsman E. F. V. Alexandersson.

Särskilt viktigt är att pleiotronerna möjliggjort ett så fulländat bruk av den s. k. svävningsmetoden för att mottaga radiotelegram, se § 6.

Vi behandla nu närmast principen för pleiotronens användning som generator.

§ 5. *Pleiotronen som generator.*

Figurerna 3 och 4 visa två av de många möjliga sätten att använda pleiotroner som generatorer. I båda fallen ha vi en av kapaciteter, C, och självinduktorer, L, sammansatt svängningskrets, som får impulser av anodströmmens växlingar. I båda fallen är det så kopplat, att

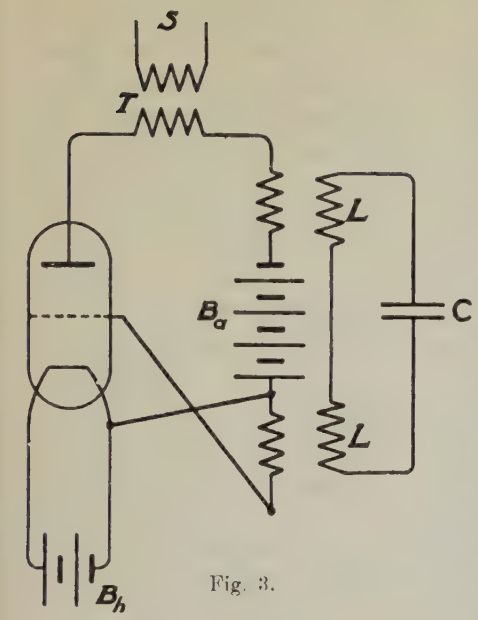


Fig. 3.

den oscillerande strömmen får tillfälle meddela spänningsvariationer åt gallret. Dessa å sin sida föranleda, att anodströmmens variationer fortsätta, om kopplingen är gjord så, att gallerspänningen verkar med lämplig fas och tillräcklig amplitud. Den ström, som skall användas, uttages t. ex. över en transformator *T* till ledningen *S*. En med anordningarna enligt fig. 3 och 4 besläktad generatorkoppling ingår i fig. 8, jfr. § 6.

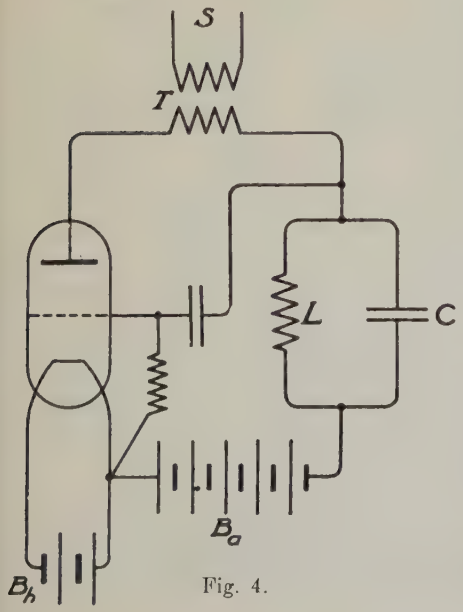


Fig. 4.

Skall en telegrafantenn drivas med den genererade strömmen, så kunde visserligen antennen kopplas till den ovannämnda ledningen *S*. I praktiken förenklar man emellertid med fördel kopplingen. Det är ju nämligen så, att antennen själv kan och bör tjänstgöra som den våglängden bestämmande svängningskretsen. En fig. 3 motsvarande koppling med antenn får därför den form, som visas av fig. 5.

Vi ha nu förklarat, hur pleiotronen kan generera oavbrutna svängningar. Vid telegrafering gäller det att endast korta stunder utsända vågserier. Och vid radiotelefonering gäller det att i viss överensstämmelse med det ljud, som skall överföras, variera de högfrekventa vågornas amplitud. I båda fallen kan den önskade effekten uppnås genom att gallerspänningen tvångsvis förändras.

Enligt § 2 härovan dödar en tillräckligt stark negativ potential hos gallret anodfältet kring *K* och utsläcker alltså anodströmmen. Detta dödande uppträder så att säga icke med ens. Utan, om gallrets medelspänning sänkes under ett visst värde, sjunker pleiotronens förstärkande förmåga. Och den sjunker alltmer, ju lägre (starkare negativ) gallerpotentialen blir. Röret verkar slutligen försvagande och vid en viss låg gallerpotential upphör all ström från *K*. Fältet kring *K* har då, tack vare den negativa laddningen hos *G*, blivit sådant att det driver tillbaka till *K* de elektroner, som på grund av den höga temperaturen slungas ut från glödtråden *K*.

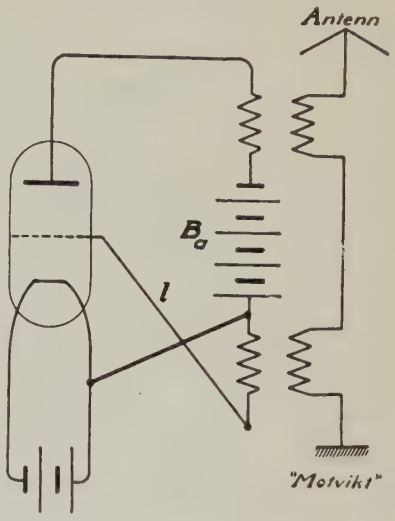


Fig. 5.

Vi förstå nu: För att få pauser mellan vågserierna vid telegrafering behöver man blott i ledningen *l*, fig. 5, inkoppla ett litet batteri, som sänker gallrets spänning så att oscillationerna dö eller mycket försvagas.[1]

[1] Pauser i vågföljden kunna naturligtvis också åstadkommas genom avbrott i den ström, som värmer tråden eller i anodströmmen. Enligt vissa radiosystem, t. ex. Poulsens, åstadkommas de genom förstämning av antennkretsen.

På analogt sätt förfar man vanligen i fråga om *radiotelefonsändare.* Fig. 6 visar en härför lämplig anordning. Den från *M* kommande förstärkta mikrofonströmmen[1] lagras medelst transformatorn *T*, som för högfrekvensen är kortsluten medelst kondensatorn *k*, över den högfrekventa ström, som går till gallret. Därvid uppstå hos gallret sådana spänningsvariationer, som åskådliggöras av fig. 10 a. Man ser den lågfrekventa svängningen och omkring dennas utslag som medellägen de högfrekventa svängningarna. Dessas amplituder äro i lågfrekvensdalarna något förminskade. Minskningen beror på att gallrets högfrekventa spänningsvariation är betingad genom »återkoppling» från anodströmmens variation. Och anodströmmen får det utseende som fig. 10 b visar. Den svänger i högfrekvens mellan nollvärde och högsta mättnadsvärde, när gallerpotentialen har sina högre värden. Åter, då gallerpotentialen befinner sig i sina lägre lägen äro strömmens högfrekvensamplituder förminskade, och detta av tvenne skäl. För det första avskäras strömvariationerna nedåt, emedan strömmen ju ej kan bli mindre än noll. För det andra försvagas rörets förstärkare- och därmed också generatorverkan på sätt som nyss nämndes, när gallerspänningen blir mycket låg (karaktäristiken — se § 9

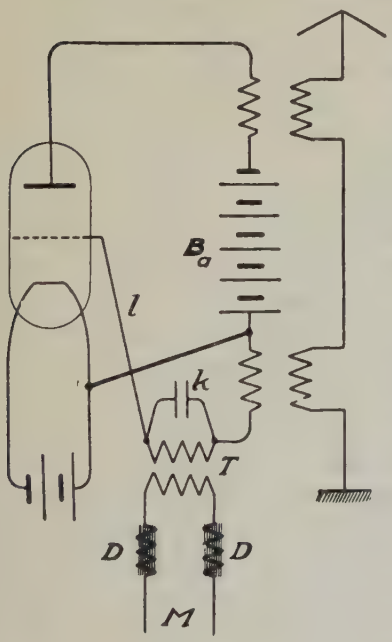


Fig. 6.

[1] På fig. 6 är mikrofonen ej utritad. *DD* beteckna två spolar (»Drosselspulen»), som hindra de högfrekventa svängningarna att nå in till mikrofonen, där de kunna verka störande.

— är för små gallerspänningar mindre brant). Den utgående antennströmmen är avbildad i fig. 10 c. Dess amplitudväxlingar motsvara styrkeväxlingarna i mikrofonströmmen.

§ 6. *Svävningsmetoden för mottagning av »odämpade» radiotelegrafvågor.*

En mottagningsapparat för gnisttelegrafi kan i sin enklaste form vara anordnad som fig. 7 visar. Antennens svängningar inducera ström i en krets, som innehåller en likriktare (s. k. detektor) och en telefon. Varje likriktad, högfrekvent vågserie tjänstgör som en impuls åt telefonen. Enär nu, som sagt, impulserna följa i en takt som motsvarar en ton, höres varje morsepunkt resp. -streck som en kortare eller längre ton i telefonen.

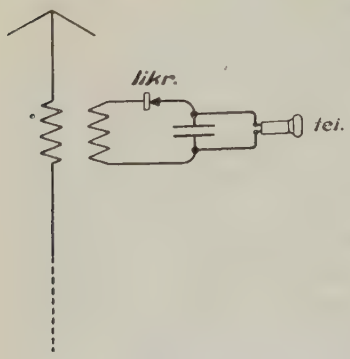


Fig. 7.

Men om det telegraferas med »odämpade» vågserier, så skulle en sådan ton ej utan vidare komma till stånd. Sändarens vågserier vill man naturligtvis ej uppdela i smärre grupper, enär man då skulle förlora en del av metodens fördelar. För att ändå få fram den nödvändiga tonen, går man lämpligast till väga på följande sätt.

Mottagarantennen drives ej blott med de ankommande etervågorna, utan tillika med dessa beskickas antennen med svaga på mottagarstationen genererade elektromagnetiska svängningar.

Ett schema över en härför lämplig anordning visar fig. 8. Man ser där till vänster om antennen en generatorkoppling, besläktad med schemata i fig. 3 och 4. Återverkan till gallret åstadkommes enligt fig. 8 genom induktion från den grovt ritade svängningskretsen, som bestämmer den genererade frekvensen. Samma krets är löst

induktivt kopplad till antennen. Därigenom inplantas i antennen en svag svängning, utan att återverkan till generatorkretsen förmår märkbart förändra dennas av dess C och L bestämda frekvens.

Mottagningsanordningen till höger om antennen är av samma slag som i fig. 7. Den reagerar för den sammansatta svängning, som uppstår i antennen.

De å mottagningsstationen genererade svängningarna förstämmas (genom förändring av kapaciteten C) något i

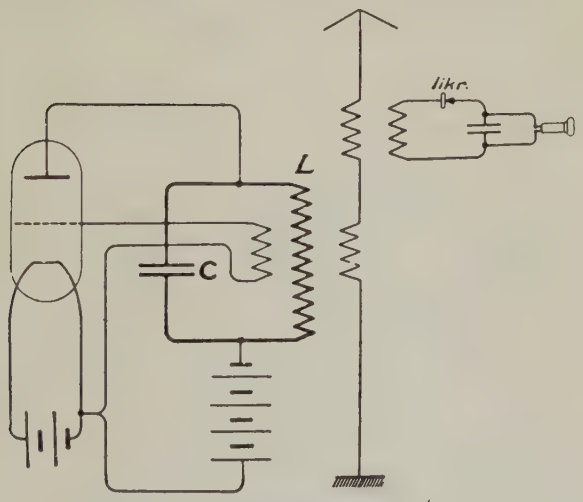


Fig. 8.

förhållande till de inkommande eftersvängningarna. De båda högfrekventa svängningar, som sålunda bli samtidiga i antennen, interferera och giva svävningar. D. v. s. svängningarna i antennen uppdelas i våggrupper med kraftigare amplituder åtskilda genom våggrupper med svagare amplituder. På kretsen med likriktaren och telefonen verkar detta precis som gnisttelegrafens grupper av högfrekvensvågor, och telefonen ljuder med differenstonen till de båda högfrekventa vågorna, så snart vågserier från sändaren nå mottagarens antenn.

§ 7. *Pleiotronen som detektor.*

I fig. 7 och 8 har likriktaren betecknats så, som man brukar beteckna kristalldetektorer. Sådana äro också synnerligen lämpliga för ändamålet Eventuellt förstärker man de för telefonen avsedda, likriktade strömimpulserna med en pleiotronanordning t. ex. i enlighet med fig. 1. Pleiotronerna kunna själva användas som likriktare, om nämligen gallrets medelpotential hålles nära det värde, som föranleder mättnadsström, eller också, med mindre fördel, nära det värde, som föranleder anodströmmens

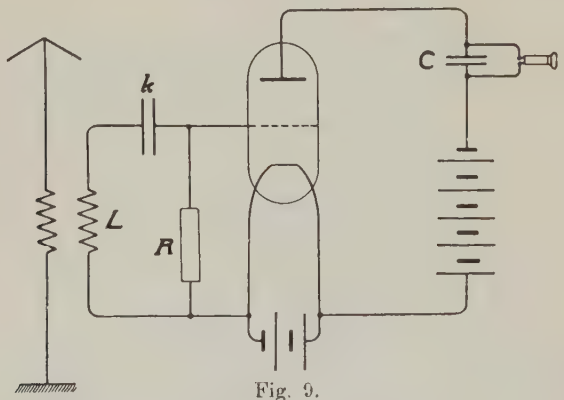


Fig. 9.

dödande. En växelspänning hos gallret kan i förra fallet vid varannan halvsvängning minska anodströmmen, i senare fallet öka den. I båda fallen kommer alltså en likriktarverkan till stånd.

Vi skola nu mer ingående visa, huruledes pleiotronerna på ett annat säreget sätt kunna ersätta likriktarna och alltså tjänstgöra som detektorer.

En härför lämplig koppling visas av fig. 9. Det har blivit brukligt att beteckna detta schema som: pleiotronen i audionkoppling.[1] Audionkopplingen uppfanns av de

[1] Lee de Forest kallade redan tidigt sina pleiotronartade detektorer för audioner. Somliga författare använda beteckningen audion som liktydig med pleiotron.

Forest. När pleiotronen användes som detektor, torde det vanligtvis vara i audionkoppling.

Karaktäristiskt för audionkopplingen är, att gallret *G* får sina spänningsimpulser över en kondensator *k*. Mellan *G* och *K* är vidare insatt ett stort motstånd *R* (någon million ohm). Anordningen verkar på följande sätt: Om från antennen elektromagnetiska svängningar induceras i *L*, så får gallret sig potentialvariationer påtvingade över *k*.

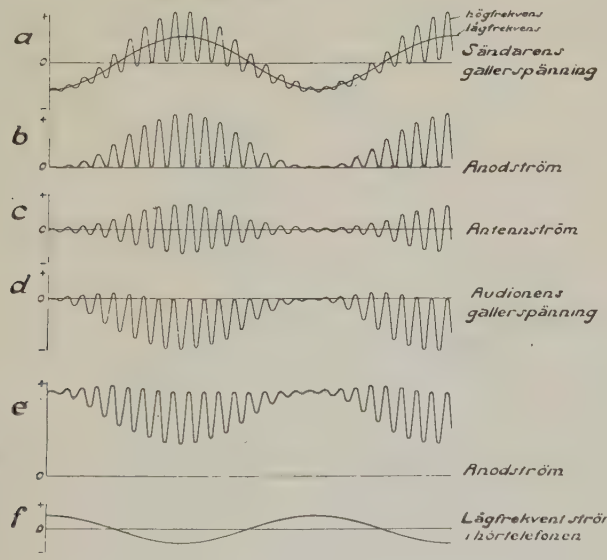


Fig. 10.

Det stora motståndet *R* övertager därvid så svaga strömmar, att det närmast kan lämnas ur räkningen. När nu under en spänningsvariation gallret ett ögonblick får positiv potential genemot *K*, tager det till sig en mängd elektroner ur strömmen från *K*. Genom den så erhållna negativa laddningen sänkes medelpotentialen hos gallret jämte den med detta förbundna beläggningen hos *k*. När därför gallerpotentialen gör nästa svängning, så sker den i sin helhet kring en lägre medelpotential. Så länge

svängningsamplituden växer, sjunker gallrets medelspänning allt mer. När sedan amplituderna börjat avtaga, förmår ledningen genom R göra sig gällande, så att gallrets medelpotential åter höjes.

Gallerspänningens växling åskådliggöres av fig. 10 d. Kurvan 10 d visar högfrekvensen lagrad över en lågfrekvens. Den sammansatta kurvan är ganska lik kurvan fig. 10 a. Kurvan 10 d avbildas uti anodströmmens växlingar, se kurvan 10 e. Anodströmmens högfrekvens tar sig i huvudsak fram över kondensatorn C, fig. 9, under det lågfrekven-

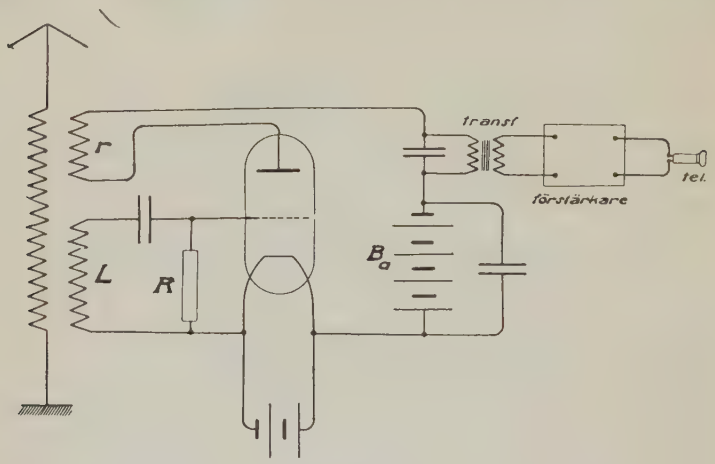


Fig. 11.

sen, för vilken C ter sig som ett stort motstånd, till största delen genomgår telefonen. Dennas membran söker röra sig i enlighet med fig. 10 f,[1] d. v. s. den får rörelser, som motsvara sändarens mikrofonström.

Vi se av denna beskrivning, hur pleiotronen kan ersätta en detektor vid radiotelefonering. Det synes visserligen ännu tvivelaktigt, huruvida den därvid äger väsentliga förtjänster gentemot kristalldetektorerna. För mot-

[1] På grund av membranens massa bli dess rörelser visserligen fasförskjutna i förhållande till impulserna. Kurvan 10 e måste alltså förskjutas något i sidled, om den skall representera membranens rörelse.

tagarna spelar pleiotronen nog den viktigaste rollen genom sin förmåga att förstärka de likriktade strömimpulserna samt som sagt som lokalströmgenerator vid den i § 6 beskrivna svävningsmetoden.

Angående schemat fig. 9 må framhållas, att det i praktiken ofta fullständigas till det fig. 11 visade. Här låter man anodkretsens högfrekvens genom spolen r återverka förstärkande på antennens eller också mera direkt på L-spolens svängningar. Uppfinnaren av denna koppling, Meissner, kallade den »Rückkopplung». Utom Tyskland användas andra benämningar t. ex. retroaktiv koppling.

Vidare är på fig. 11 att märka, att batteriet B_a kortslutits för högfrekvensen genom en kondensator. Till sist synes, att lågfrekvensen förstärkes, innan den når telefonen.

§ 8. *Några data ur pleiotronens historia.*

Rätt tidigt försökte uppfinnare dana ett relä med tillhjälp av genom mer eller mindre fullständigt vakuum slungade elektroner, som skulle påverkas av elektriska eller magnetiska fält. Åtminstone från år 1905 äro sådana försök bekanta. Samtidigt konstruerade särskilt Wehnelt i Tyskland (1904), Fleming i England (1905) och de Forest i U. S. A. (1907) likriktare, som grundade sig därpå, att anordningen med en glödkropp som elektronkälla gentemot en kall anod kan genomsläppa negativ ström endast i riktningen från glödkroppen till anoden. Fleming och de Forest försökte använda sådana likriktare som detektorer för radiotelegrafien. De Forest insatte en tredje elektrod, ett galler, i likriktaren och försökte genom olika anordningar finna någon fördel av denna nya elektrod. R. v. Lieben i Wien hade redan omkring 1906 börjat försök att dana ett katodstrålrelä, men han stötte på många svårigheter. När han fick reda på de Forest's försök med ett galler mellan katoden och anoden, började han också laborera med ett sådant galler. Han lyckades snart, år 1910,

med tillhjälp av detta konstruera det första praktiskt användbara förstärkande katodstrålreläet. Det innehöll alltså en glödkatod, ett primärt påverkat galler och en anod. Högvakuum kunde man på den tiden ej framställa. Det var måhända skälet till att de Forest's rör, som redan tidigt liknade pleiotronerna, först ungefär samtidigt med v. Liebens lyckade försök gladde sin konstruktör med förstärkningsverkan. v. Lieben arbetade avsiktligt med gasfyllda rör. De voro fyllda med kvicksilverånga av visst tryck. Katoden utgjordes av en s. k. Wehnelt-katod, ett platinaband betäckt med calciumoxider, vilket glödgades genom ström. En Wehneltkatod utsöndrar redan vid rödglödning elektroner i riklig mängd. Förstärkningsprocessen uti de s. k. Liebenrören var ganska komplicerad, i det stötioniseringsfenomen där spelade en viktig roll. Därmed sammanhängde, att rören funktionerade rätt nyckfullt. De voro t. ex. mycket beroende av rumstemperaturen. Wehneltkatoderna äro svåra att få gasfria och lämpa sig ej för arbete i högvakuum. Först sedan man för glödlampindustriens räkning fått metoden att göra wolframtråd och sedan Coolidge och Langmuir utarbetat metoderna för att åstadkomma högvakuum, kunde de exakt och kraftigt verkande pleiotronerna uppstå. De första högevakuerade med wolframtråd försedda pleiotronerna konstruerades av Langmuir 1913. Under de två följande åren kom arbetet på den vidare utbildningen av pleiotronerna i gång även i Tyskland. Från övriga länder kommo endast oväsentliga bidrag till detta arbete. Tack vare medverkan av en mängd vetenskapsmän, t. ex. Langmuir, Schottky, Rukop, bragtes teorien för pleiotronerna till en mycket hög ståndpunkt. Man kan nu på förhand noga beräkna, hur en pleiotron skall konstrueras för att motsvara ett givet ändamål. Det har också lyckats i hög grad normera de olika typerna, så att pleiotroner av viss typ från en god firma t. ex. fordra samma glödström och utan vidare kunna ersätta varandra.

Om evakueringsmetoden må nämnas några ord. Det befanns särskilt svårt att fullständigt befria metalldelarna,

spec. anoden från innesluten gas. Detta lyckas endast därigenom, att pleiotronen, medan den pumpas, upphettas till över 300° och därvid drives med rätt stark anodström, vars elektroner så att säga piska gasen ut ur anoden. Under denna procedur gäller det att se till, att den frigjorda gasen ej något ögonblick når nämnvärd täthet i pleiotronen. Ty annars kunde där genom ionisering uppstå alltför talrika positiva ioner, vilka ha förmågan att så småningom piska sönder glödtråden. Särskilt svårt är att få sändarpleiotroner tillräckligt härdiga mot de stora energimängder, som utvecklas i dem, isynnerhet om de vissa ögonblick drivas i tomgång och ej få avlasta vederbörlig energi utåt.

Härmed kunde denna uppsats avslutas. Emellertid skola för mera intresserades räkning tvenne paragrafer tillfogas. De intagas i nästa häfte av denna tidskrift.

Grunddragen av teorien för alkalimetrisk och acidimetrisk titrering.

Av J. ARVID HEDVALL.

»Titrering är en vägning utan våg» säger Mohr i sin »*Lehrbuch der chemisch analytischen Titrirmethode 1855*». Det är den skillnaden, att man vid titrering eller volymetrisk analys kan reducera de vid vanlig viktsanalys ofta upprepade vägningarna till en enda, nämligen uppvägningen av den ursubstans på vilken titervätskan ställes. Med kännedom om dennas mängd och om den kemiska formeln för reaktionen mellan ursubstansen och ämnet i titervätskan kan den senares halt alltså bestämmas och användas för en mängd analyser. Införandet av detta förfaringssätt som kemisk analysmetod skedde genom Gay Lussacs arbete: »*Instruction sur l'essai des matières par la voie humide*» *1833*. Redan några år tidigare hade han emellertid framlagt de första försöken att på denna väg bestämma en del ämnen, t. ex. alkali, klor och silver. Metoden rönte omedelbart ett intresserat mottagande, mindre dock av den rent vetenskapliga kemien, än av den industriella, där det gällde att på kortast möjliga tid utföra en ofta återkommande bestämning. Fortsatta arbeten av Margueritte, Mohr och Volhard ledde till en allt mera vidgad tillämpning av det Gay Lussac-ska förfaringssättet. Från dess ursprungliga användning inom tekniken som en snabb och bekväm metod utan större anspråk på noggrannhet höjdes den också så småningom till rangen av

fullt vetenskaplig, exakt analysmetod, fyllande även mycket högt ställda krav på precision.

Antalet titrimetriska bestämningsmetoder är numera mycket stort och deras användbarhet utsträckt till snart sagt varje gren inom den kemiska analysen. Trots detta kan man dock säga att samtliga äro baserade på en och samma princip. Det gäller nämligen vid varje analys av denna art att kunna bestämma den kvantitet av titervätskan, som svarar mot det fullständiga förbrukandet av det ämne, vars mängd skall beräknas. Reaktionen mellan detta och titervätskan måste således vara av den art, att försvinnandet av analyssubstansen eller de första ringa spåren av ett överskott av titervätskan momentant anges genom t. ex. en färgförändring hos lösningen eller genom uppkomsten av en fällning. I de flesta fall åstadkommes färgomslaget ej av de i reaktionsformeln ingående ämnena själva, utan genom tillsats av en så kallad indikator, d. v. s. ett ämne vars färg och sammansättning förändras redan genom ett ytterst ringa överskott av analyssubstansen eller titervätskan.

De olika titrermetoderna bruka indelas i följande grupper:

1. Metoder, som grunda sig på blandning av ekvivalenta mängder syra och bas: acidimetri och alkalimetri.
2. Metoder, som grunda sig på oxidations- och reduktionsreaktioner: oxidimetri och jodometri.
3. Metoder, som grunda sig på fällningsreaktioner.

De två sistnämnda grupperna fordra en mera individuell behandling. Teorien för den förstnämnda är däremot gemensam för alla dithörande reaktioner. Då ett närmare studium av de till första gruppen hörande metoderna ur dissociationsteoretisk synpunkt är synnerligen instruktivt och absolut nödvändigt för deras fullständiga förstående, har i det följande endast de alkalimetriska och acidimetriska titreringarnas teori behandlats. I ett annat sam-

manhang skall jag i en kommande uppsats återkomma till de övriga.

Med alkalimetri och acidimetri menas den volymetriska bestämningen av en bas respektive en syras mängd i en lösning. Gäller det bestämningen av en bas, sker titreringen med en förut ställd lösning av en stark syra; utgöres analyssubstansen åter av en syra, användes som titervätska en känd lösning av en stark bas. För att kunna avgöra, då man titrerat ned en med syran ekvivalent mängd lut måste emellertid en indikator tillsättas, som genom färgförändring bör ange, då den s. k. ekvivalenspunkten uppnåtts. Ett ytligt betraktande kan måhända leda till den uppfattningen, att ekvivalens- och neutralisationspunkt äro identiska, och att färgomslaget bör inträda i det ögonblick lösningen blivit neutral; den med volymetriska analyser förtrogne vet, att så ej är fallet. Härmed sammanhänger valet av indikator vid en bestämning av denna art, och för att förstå eller själv kunna träffa detta val är ett noggrant studium av jonförhållandena i lösningarna av nöden.

Antag att vi ha en syra HA, vars dissociation således anges av uttrycket:

$$HA \rightleftarrows H^{\cdot} + A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

så veta vi enligt den Guldberg—Waage'ska lagen, att

$$\frac{[H^{\cdot}] \cdot [A']}{[HA]} = K_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Ia),$$

(med beteckningssättet [] anges ämnets mol-koncentration pr liter) där K_A kallas ifrågavarande syras dissociationskonstant och utgör ett mått på syrans styrka. För en bas MOH erhålles på samma sätt:

$$MOH \rightleftarrows M^{\cdot} + OH' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

och:

$$\frac{[M^{\cdot}] \cdot [OH']}{[MOH]} = K_M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IIa),$$

där basens styrka anges genom värdet på K_M.

För en tvåbasisk syra sker dissociationen i två stadier:

$$H_2A \rightleftarrows H^{\cdot} + HA' \text{ (III) och } HA' \rightleftarrows H^{\cdot} + A'' \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

och de motsvarande jämviktsekvationerna bli:

$$\frac{[H^{\cdot}] \cdot [HA']}{[H_2A]} = K'_A \text{ (III a) och } \frac{[H^{\cdot}] \cdot [A'']}{[HA']} = K''_A \quad . \quad . \text{ (IV a).}$$

För en bas erhålles naturligtvis analoga uttryck.

Dissociationskonstanterna ha för olika syror och baser mycket varierande värden. För en stark syra eller bas belöper sig dess värde till c:a 1. K är t. ex. för ättiksyra och ammoniak $0{,}18 \cdot 10^{-4}$ och för cyanvätesyra och anilin $5 \cdot 10^{-10}$ och $4 \cdot 10^{-10}$ respektive. För det fall att t. ex. en syras dissociation sker på det sätt, som anges av uttrycken III och III a, IV och IV a, är att märka, att värdet för den dissociationskonstant (K'_A), som svarar emot syran, som enbasisk betraktad (III och III a), är störst. För kolsyra är således $K'_A = 0{,}30 \cdot 10^{-6}$ och $K''_A = 0{,}13 \cdot 10^{-10}$.

I en vattenlösning gäller för vattnet självt på samma sätt:

$$H_2O \rightleftarrows H^{\cdot} + OH' \text{ (V) och } \frac{[H^{\cdot}] \cdot [OH']}{[H_2O]} = K \quad . \quad . \quad \text{(V a),}$$

där K på grund av vattnets ytterst obetydliga sönderfallande i joner är ett mycket litet tal. Då åtminstone i utspädda lösningar $[H_2O]$ kan anses konstant, kunna vi sätta $K \cdot [H_2O] = K_V$.* K_V kan då betraktas som vattnets dissociationskonstant, och dess värde är $= 10^{-14}$ ($+ 20°$ C).

Om en stark syra HA blandas med en stark bas MOH, så uttryckes reaktionsförloppet genom formeln:

$$H^{\cdot} + A' + M^{\cdot} + OH' = M^{\cdot} + A' + H_2O \text{ eller}$$
$$H^{\cdot} + OH' = H_2O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI).}$$

Det är således vattenbildningen, som är orsaken till neutraliseringen. I varje lösning, som innehåller väte och

* $[H_2O] = \frac{1000}{18} =$ c:a 55.

hydroxyljoner, måste därför, oberoende av arten och antalet i densamma upplösta ämnen, ekvationen

$$[H^{\cdot}] \cdot [OH'] = 10^{-14}$$

vara satisfierad. Varje vattenlösning innehåller således både väte- och hydroxyljoner.

Antag, att vi så småningom till en lösning av saltsyra sätta en lösning av kaliumhydrat och att lösningarnas koncentration är en mol pr liter. Före blandningen kunna vi anse vätejonkoncentrationen i syran och hydroxyljonkoncentrationen i basen vara approximativt = 1 och således hydroxyljonkoncentrationen i syran och vätejonkoncentrationen i basen vara = 10^{-14} enligt ekvation VI a. Vid nedtitreringen av luten minskas alltjämt vätejonkonc. i syran, under det att hydroxyljonkonc. ökas, så att produkten av båda är konstant och = 10^{-14}. Då ekvivalenta mängder syra och bas blandats, är konc. av båda jonslagen i lösningen densamma och = 10^{-7}. En lösnings förändring från sur till basisk är således på grund av att vätejoner och hydroxyljoner tillsammans kunna finnas i lösningen, d. v. s. att vattnets dissociation icke är noll, icke plötslig utan successiv. Därför sker ej heller den tillsatta indikatorns färgomslag fullt diskontinuerligt. Sur är då en lösning, vari vätejonkoncentrationen är större än hydroxyljonkoncentrationen och vice versa.

Antag, att vi hade till vårt förfogande en indikator, vars område för tydligt färgomslag låge just i närheten av en vätejonkoncentration = 10^{-7}, d. v. s. vid neutralitetspunkten. Den skulle således vara så beskaffad, att en obetydlig ökning av $[H^{\cdot}]$ från 10^{-7} räknat skulle framkalla den ena färgen, en ringa minskning därav, d. v. s. ökning av $[OH']$ den andra. Denna indikator skulle då i alla fall icke exakt ange, då ekvivalenta mängder syra och bas blandats. Denna differens mellan ekvivalens- och neutralitetspunkt beror på den hydrolytiska sönderdelningen av det bildade saltet. Är den syra, som skall titreras, svagare än den därvid använda basen, innehåller lösningen

vid blandning av ekvivalenta mängder mera hydroxyl- än vätejoner. Den använda indikatorn måste alltså för att bestämningen skall utfalla fullt riktigt slå om i alkalisk lösning och om möjligt precis då $[OH']$ nått det värde, som svarar mot det bildade saltets hydrolys. Graden härav eller den mot ekvivalenspunkten svarande vätejon- eller hydroxyljonkoncentrationen i lösningen kan lätt beräknas med tillhjälp av de närvarande ämnenas dissociationskonstanter.* Titreras åter en svag bas med en stark syra, bör användas en indikator, vars tydliga färgomslag äger rum först sedan lösningen blivit något sur. Då saltets hydrolytiska sönderfall växer med avtagande styrka hos motsvarande syra och bas, användes alltid som titervätska en stark bas eller en stark syra. Trots detta är hydrolysen dock redan för t. ex. natriumacetat ganska betydlig och gör sig väl märkbar vid användning av olika indikatorer. Mest bekant torde det förhållandet vara, att fenolftalein väl lämpar sig vid titrering av en svag syra, men ingalunda vid bestämningen av en svag bas. I det senare fallet kan däremot metylorange användas, eller ännu bättre metylrött.

Innan man kan använda en indikator måste man känna den för ämnet i fråga karaktäristiska $[H']$, där omslaget sker. Man måste alltså pröva indikatorns förhållande i lösningar med känd $[H']$. Då denna är större än c:a 10^{-3} eller mindre än 10^{-11}, låta sig sådana lösningar lätt framställas genom att späda ut starka syror eller baser till en viss grad, som kan beräknas med den Ostwaldska utspädningslagen:

$$\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)v} = K,$$

där α = dissociationsgraden, v = volymen och K = dissociationskonstanten. Vätejonkoncentrationer, varierande inom intervallet, c:a 10^{-3}—10^{-11}, d. v. s. det område, inom vilket den mot ekvivalenspunkten svarande $[H']$ brukar

* Jfr *Nernst*, Theoretische Chemie, sid. 527 (sjätte uppl.).

vara belägen, kunna emellertid ej på samma enkla sätt åstadkommas. Utspädningslagen är nämligen vid så små koncentrationer av starkt dissocierade elektrolyter icke giltig. Det har nämligen visat sig, att redan mycket små mängder föroreningar utöva ett avsevärt inflytande på dissociationsförhållandena vid så stor utspädning. Inom ifrågavarande område regleras $[H^{\cdot}]$ därför ej genom utspädning, utan genom att blanda svaga syror eller baser med lösningar av deras respektive salter.* Utförliga recept finnas angivna av Sörensen** för framställning av vilken $[H^{\cdot}]$ som helst. En sådan series användbarhet grundar sig givetvis på en noggrann kännedom av dessa värden, vilka naturligtvis kunna direkt beräknas med tillhjälp av de vanliga dissociationsekvationerna. Mycket noggranna värden kunna även erhållas genom att mäta potentialdifferensen mellan vätejonerna i lösningen och en vätgaselektrod, d. v. s. en med vätgas av bestämt tryck laddad platinaelektrod. Den erhållna potentialdifferensen (E) är vid konstant temperatur därvid endast beroende på $[H^{\cdot}]$ i lösningen och kan beräknas enligt den Nernstska formeln:

$$E = k - 0{,}0577 \log [H^{\cdot}],$$

där k är en konstant.

Med tillhjälp av en serie sådana lösningar kan man nu för varje indikator utprova det s. k. omslagsintervallet, d. v. s. mellan vilka vätejonkoncentrationer färgomslaget är tydligast. Om indikatorkoncentrationen i den lösning, som skall undersökas, är den vanliga, d. v. s. c:a 0,01 %, inträffar färgomslaget för de vanligaste indikatorerna inom ungefär följande $[H^{\cdot}]$-intervall:

metylorange: $10^{-3,1}$—$10^{-4,4}$
metylrött: $10^{-4,2}$—$10^{-6,3}$
p. nitrofenol: 10^{-5} —10^{-7}
fenolftalein: $10^{-8,3}$—10^{-10}

* Jfr *Ramberg*, Grunddragen av den kemiska analysens teori, sid. 29 (Lund 1905).

** Compt. rend. Carlsberg, 8, sid. 35 och 396 (1909).

Man kan då approximativt förlägga omslagets optimum till $10^{-3,5}$, 10^{-5}, 10^{-6} och 10^{-9} för de nämnda indikatorerna resp.

Vi erinra oss åter förhållandena vid titrering av en svag syra. Vi hade funnit med hänsyn till det bildade saltets hydrolys, att en indikator med omslag i alkalisk lösning därvid måste användas. Antag, att vi titrera ättiksyra med natriumhydrat. Man kan då beräkna, att det bildade natriumacetatet i 0,1 normal lösning är hydrolyserat till 0,008 %, d. v. s. att $[H^{\cdot}] = 1,42 \cdot 10^{-9}$.* En jämförelse mellan de anförda siffervärdena för fenolftalein och metylorange visa tydligt, varför den förra men ej den senare indikatorn kan användas.

Av här berörda exempel framgår således, huru man efter en beräkning av det bildade saltets hydrolysgrad och med kännedom om de olika indikatorernas omslagsintervall kan utvälja en för en viss titrering lämplig indikator. Kunna flere olika indikatorer komma i fråga, väljes den, vars omvandling sker hastigast, om samtidigt färgförändringen motsvarar ett optimum i tydlighet.

I ovanstående resonemang ha vi anlagt några viktiga synpunkter vid valet av indikator, och vi kunna också i många fall anse uppfyllandet av de hittills uppställda villkoren tillräckligt. Komplikationer uppträda emellertid — t. o. m. vid mycket ofta förekommande titreringar — som göra det nödvändigt att närmare undersöka förhållandena rent kvantitativt. Närvarande syror eller baser kunna t. ex. vara så svagt dissocierade att de över huvud taget icke låta sig titreras. Fosforsyrans titrering som en- eller tvåbasisk och bestämmandet av en syra eller bas oberoende av närvarande kolsyra utgöra ofta förekommande exempel härpå. Nödvändigheten av ett mera ingående studium framgår också vid en beräkning av analysfelens storlek. Även vid en i instrumentellt och tekniskt avseende fulländad titrering kunna vi ju praktiskt taget aldrig erhålla precis de koncentrationsförhållanden i den färdigtitrerade

* Jfr *Nernst*, loc. cit. sid. 530.

lösningen, som motsvara upplösandet av en lika stor mängd av det vid titreringen uppkomna neutralsaltet. En differens mellan ekvivalenspunkt och omslagsoptimum måste vi nämligen alltid räkna med. Genom den förändring av $[H^{\cdot}]$ eller $[OH']$, som blir följden härav, kommer hydrolysjämvikten:

$$[M^{\cdot}] + [A'] + [\triangle H^{\cdot}] + [\triangle OH'] = [M^{\cdot}] + [(1-\triangle)A'] + [\triangle HA] + [\triangle OH']^{*}$$

att förskjutas och koncentrationerna således att antaga andra värden än dem, som svara mot hydrolysgraden.

Bjerrum,** vars behandlingssätt av hithörande problem vi följt även i det föregående, har uppställt ett uttryck för de fel, som således normalt uppträda vid varje titrering av denna art. Antag som förut, att vi titrera en svag syra med en stark (praktiskt taget fullständigt dissocierad) bas. Då kunna vi sätta det uppkomna felet lika med skillnaden mellan tillsatt lut och förhandenvarande syra eller mellan mängden fritt alkali och fri syra i den färdigtitrerade lösningen. Om [] som vanligt betyder konc. av de olika jon- och molekylslagen per liter i ekvivalenter räknat, betyda

$$\frac{v}{1000}[OH'] \text{ och } \frac{v}{1000}([H^{\cdot}] + [HA])$$

resp. mängder fri bas och syra i den färdigtitrerade lösningen, vars volym är v cm^3. Felet vid titreringen blir således:

$$F = \frac{v}{1000}([OH'] - [H^{\cdot}] - [HA]) =$$

$$= \frac{v}{1000}[OH'] - \frac{v}{1000}[H^{\cdot}] - \frac{v}{1000}[HA].$$

Om vi antaga titervätskans (lutens) normalitet vara n, så motsvaras dessa mängder av resp.

$$\frac{v}{n}[OH'], \frac{v}{n}[H^{\cdot}] \text{ och } \frac{v}{n}[HA] \text{ cm.}^3 \text{ av luten.}$$

* Med beteckningen $[\triangle H^{\cdot}]$ menas en mycket liten bråkdel av enheten Jfr *Ramberg* loc. cit. sid. 40.

** Samml. chem. techn. Vorträge XXI, sid. 1—128.

Direkt i cm.^{3} lut blir således:

$$F = \frac{v}{n}[OH'] - \frac{v}{n}[H\cdot] - \frac{v}{n}[HA] = f_1 - f_2 - f_3.$$

Titrera vi nu vår svaga syra till sur reaktion i stället för basisk, som hydrolysjämvikten kräver, ha vi i lösningen en alldeles för stor [H·]. I jämförelse med det fel $\frac{v}{n}[H\cdot]$, som härigenom uppkommer, försvinna praktiskt taget de andra termerna i uttrycket och vi ha approximativt

$$F = f_1 = \frac{v}{n}[H\cdot].$$

Titrera vi åter till alkalisk reaktion, blir felet huvudsakligen beroende på huru nära indikatorns omslagsoptimum och ekvivalenspunkten, i [H·] uttryckt, sammanfalla. Felet blir alltså beroende på, om $\frac{v}{n}[OH']$ får ett stort eller litet värde, och vi kunna i detta fall approximativt sätta

$$F = f_2 = \frac{v}{n}[OH'].$$

Vid en genomsnittstitrering kunna vi sätta $v = 100$ cm.^{3} och n (lutens normalitet) $= {}^1/_{10}$. Vilja vi då sätta gränsen för felet till 0,0 1 cm.^{3} av titervätskan, få vi genom insättning i de approximativa felformlerna

$$0{,}0\,1 = \frac{v}{n}[H\cdot] = \frac{100}{0{,}1}[H\cdot] \text{ och}$$

$$0{,}0\,1 = \frac{v}{n}[OH'] = \frac{100}{0{,}1}[OH'].$$

Härav erhålla vi:

$$[H\cdot] = 10^{-5} \text{ och } [OH'] = 10^{-5},$$

d. v. s. [H·] får under dessa betingelser ($v = 100$, $n = {}^1/_{10}$) aldrig bli $> 10^{-5}$ och aldrig $< 10^{-9}$. Eftersom vi i före-

liggande fall skola titrera till alkalisk reaktion, måste indikatorns omslagsoptimum ligga mellan $[H^{\cdot}] = 10^{-7}—10^{-9}$. Fenolftalein, vars omslag inträffar för $[H^{\cdot}] = 10^{-9}$, är således den rätta indikatorn. Titrera vi åter en svag bas, så måste vi mutatis mutandis ha indikatoromslaget i intervallet $[H^{\cdot}] = 10^{-7}—10^{-5}$. Metylrött, vars omslag motsvarar en $[H^{\cdot}] = 10^{-5}$, är således den idealiska indikatorn och avgjort att föredraga framför metylorange ($10^{-3,5}$). Även med metylorange kunna vi emellertid, som framgår av uttrycket $f_1 = \frac{v}{n}[H^{\cdot}]$, erhålla acceptabla värden genom att öka lutens normalitet (n) eller minska totalvolymen (v).

Den tredje termen, $f_3 = \frac{v}{n}[HA]$ eller syrefelet, bör, innan vi ingå på en diskussion av dess betydelse, omvandlas i en lämpligare form. För ifrågavarande syra HA gäller:

$$\frac{[H^{\cdot}]\,[A']}{[HA]} = K_A \text{ och,}$$

om [A] får beteckna totalkonc. av den icke titrerade syran,

$$[A] = [A'] + [HA].$$

Genom eliminering av [A'] och lösning i avseende på [HA] erhålles:

$$[HA] = \frac{[H^{\cdot}] \cdot [A]}{K_A + [H^{\cdot}]},$$

således syrefelet

$$f_3 = \frac{v}{n}[HA] = \frac{v}{n}[A] \cdot \frac{[H^{\cdot}]}{K_A + [H^{\cdot}]}.$$

Faktorn $\frac{v}{n}[A]$ betyder i full analogi med uttrycken $\frac{v}{n}[H^{\cdot}]$ och $\frac{v}{n}[OH']$ det antal cm.^{3} av luten (titervätskan), som svarar mot i den färdigtitrerade lösningen närvarande fri syra. Vi kunna i korthet beteckna denna faktor a. För att nu felet skall bli litet fordras att

$$\frac{f_3}{a} = \frac{[H^\cdot]}{K_A + [H^\cdot]}$$

är litet, varav inses att $[H^\cdot]$ approximativt kan försummas gent emot K_A.

$$\text{Härav } f_3 = a\frac{[H^\cdot]}{K_A}.$$

Av uttrycket synes, vad som för övrigt utan vidare är klart i alla fall, att felet blir mindre ju större syrans dissociationskonstant är och ju mindre $[H^\cdot]$ i lösningen är. Om vi önska att titreringsfelet på grund av i lösningen närvarande odissocierad syra ej skall överstiga 0,1 %, få vi

$$\frac{f_3}{a} \leqq 0{,}001 = \frac{[H^\cdot]}{K_A}.$$

Enligt föregående får ej $[H^\cdot]$ vara $< 10^{-9}$, varemot svarar $K_A = 1000 \cdot 10^{-9}$. För att utan större fel *kunna* titreras måste syrans dissociationskonstant således vara minst 10^{-6}, under i övrigt som förut antagna titreringsbetingelser ($v = 100$ cm.^{3}, $n = 0{,}1$). På fullt analogt sätt erhålles att endast de baser äro under de antagna betingelserna ($v = 100$, $n = 0{,}1$, indikator: metylrött) titrerbara, som ha en dissociationskonstant $> 10^{-6}$. Av den, ur det Bjerrumska arbetet, här avtryckta tabellen framgår, vilka syror och baser som falla inom och under dessa gränser:

syror	dissoc. konst.	baser	dissoc. konst.
starka syror	c:a 1	starka baser	c:a 1
svavelsyrlighet	$1{,}70 \cdot 10^{-2}$	piperidin	$0{,}15 \cdot 10^{-2}$
monoklorättiksyra	$0{,}15 \cdot 10^{-2}$	metylamin	$5 \cdot 10^{-4}$
myrsyra	$2{,}14 \cdot 10^{-4}$	ammoniak	$0{,}18 \cdot 10^{-4}$
ättiksyra	$0{,}18 \cdot 10^{-4}$	hydrazin	$3 \cdot 10^{-6}$
kolsyra	$0{,}30 \cdot 10^{-6}$	pyridin	$0{,}16 \cdot 10^{-8}$
underklorsyrlighet	$4 \cdot 10^{-8}$	anilin	$4 \cdot 10^{-10}$
cyanvätesyra	$5 \cdot 10^{-10}$	p. nitranilin	$1 \cdot 10^{-12}$
fenol	$1 \cdot 10^{-10}$	urinämne	$1{,}2 \cdot 10^{-14}$
vätesuperoxid	$2 \cdot 10^{-12}$		

Med fenolftalein kunna vi således vid en totalvolym $= 100$ cm.^{3} och en lutnormalitet av 0,1 titrera en syra, hvars $K > 10^{-6}$, utan risk, att felet på grund av närvarande hydroxyljoner och odissocierad syra blir stort. Analogt gäller vid titrering med metylrött för svaga baser ($K > 10^{-6}$).

Nu kan det emellertid hända att vi i en del titreringar *vilja göra felen* på grund av odissocierad syra eller bas (syre- och basfelen) så *stora* som möjligt, d. v. s. om möjligt icke alls medtitrera dessa syror eller baser (ex. titrering på lut eller syra utan att medtitrera närvarande kolsyra). Av den svaga syran eller basen vilja vi således i form av odissocierade molekyler undandraga så stor mängd som möjligt från att titreras, d. v. s. vi vilja ha ett så stort värde som möjligt på uttrycket $f_3 = a\frac{[H^{\cdot}]}{K_A}$ eller motsvarande uttryck för baser. Antaga vi då, att i stället endast 0,1 % medtitreras, under det att således 99,9 % i form av odissocierad syra undandrar sig reaktionen, få vi:

$$\frac{f}{a} = 1000 = \frac{[H^{\cdot}]}{K_A},$$

varav, om $[H^{\cdot}]$ som förut $= 10^{-9}$, $K_A = 10^{-12}$. Vid titrering under normalbetingelser med fenolftalein kunna således endast de syror, vilkas $K < 10^{-12}$, om de förekomma i lösningen, lämnas ur räkningen, Ha vi således två syror i en lösning och vi önska titrera den ena (A_1) men ej den andra (A_2), så skola vi, om det i avseende på indikatoromslaget över huvud taget är möjligt, välja den $[H^{\cdot}]$ till vilken vi titrera så, att $\frac{[H.]}{K_{A_2}}$ får ett så stort, $\frac{[H^{\cdot}]}{K_{A_1}}$ ett så litet värde som möjligt.

Som exempel kunna vi anföra titrering av fosforsyra. Mot de olika dissociationsstadierna:

$H_3PO_4 \rightleftarrows H^{\cdot} + H_2PO_4'$; $H_2PO_4' \rightleftarrows H^{\cdot} + HPO_4''$ och $HPO_4'' \rightleftarrows H^{\cdot} + PO_4'''$

svara: $K_{A_1} = 10^{-1,96}$; $K_{A_2} = 10^{-6,7}$ och $K_{A_3} = 10^{-12,44}$

Vid titrering av syran som enbasisk, måste den $[H^{\cdot}]$, till vilken vi skola titrera, ligga mellan och så långt ifrån K_{A_1} och K_{A_2} som möjligt, alltså vara $= \frac{K_{A_1} + K_{A_2}}{2} = 10^{-4,33}$, ett värde, som rätt väl stämmer med den $[H^{\cdot}]$, som erhålles vid ekvivalenspunkten $9,3 \cdot 10^{-5}$. Vi kunna emellertid förutse att vid denna titrering inga goda värden kunna erhållas, ty dels är förhållandet $\frac{K_{A_1}}{[H^{\cdot}]}$ och $\frac{[H^{\cdot}]}{K_{A_2}}$ icke 1000, dels befinna vi oss utom den enligt vårt föregående resonemang tillåtna maximala $[H^{\cdot}] = 10^{-5}$, dels avviker — om vi välja metylorange som indikator — dess omslagsoptimum $10^{-3,5}$ betydligt ifrån värdet $10^{-4,33}$. Titrera vi med förut antagna normala betingelser ($v = 100$ cm.^{3}, $n = 0,1$), så visar det sig också att på detta sätt inga noggranna värden kunna erhållas.

Gynnsammare äro utsikterna vid titrering av syran som tvåbasisk.

$\frac{K_{A_2} + K_{A_3}}{2} = 10^{-9,57}$ d. v. s. i det närmaste 1000 ggr. större än K_{A_3} och 1000 ggr. mindre än K_{A_2}. Vidare överensstämmer detta värde ganska väl med fenolftaleinets omslagsoptimum $[H^{\cdot}] = 10^{-9}$ och med den $[H^{\cdot}] = 1,3 \cdot 10^{-9}$, som svarar mot $H_3PO_4 = 2H^{\cdot} + HPO_4''$. Vi befinna oss emellertid även här en smula utom de tillåtna $[H^{\cdot}]$-gränserna 10^{-5}—10^{-9} och kunna således ej heller nu erhålla mycket noggranna värden. Det är tydligen hydroxyljonfelet (för liten $[H^{\cdot}]$), som här vållar största felaktigheten.

Vi ha förut sett av uttrycken

$$f_1 = \frac{v}{n}[H^{\cdot}] \text{ och } f_2 = \frac{v}{n}[OH'],$$

att felet kan nedbringas genom att minska totalvolymen (v) eller öka normaliteten (n) på titervätskan. På analogt sätt ger oss också uttrycket

$$f_3 = a\frac{[H^{\cdot}]}{K_A}$$

upplysning om, huru vi kunna förändra titreringsbetingelserna för att erhålla mindre felvärden. För den syran HA_1 vi önska titrera, gäller, att så litet som möjligt skall undandraga sig titreringen i form av odissocierad syra HA_1, d. v. s, $f_3 = a_1 \frac{[H^\cdot]}{K_{A_1}}$ bör vara så litet som möjligt. För den syran HA_2, som icke skall medtitreras, bör åter mängden HA_2 vara så stor som möjligt. Men om $a_2 \frac{[H^\cdot]}{K_{A_2}}$ således bör vara så stort som möjligt, bör givetvis $a_2 \frac{K_{A_2}}{[H^\cdot]}$ vara så litet som möjligt. Om nu, som vid titreringen av fosforsyra som tvåbasisk, förhållandet $\frac{[H^\cdot]}{K_{A_1}}$ och $\frac{K_{A_2}}{[H^\cdot]}$ ha bestämda värden, vilka avvika från det ideala $\geqq 1000$, kan felet (i $cm.^3$ lut räknat) dock tydligen nedbringas genom att minska a_1 och a_2, alltså mängden av de närvarande syrvrna.

Ändamålet med denna översikt har varit att framhålla det väsentligaste av teorien för alkalimetriska och acidimetriska titreringar. Framställningen är naturligtvis på grund av sin korthet i många stycken ofullständig. Vid de allra enklaste titreringarna torde dock det givna behandlingssättet vara tillfyllest. Den, som endast för övnings skull sysslar med dylika analyser, bör alltså häri finna en tillräckligt lättfattlig hjälp för att undgå ett rent receptmässigt arbete. För den åter, som mera ingående studerar hithörande metoder, vill den vara en förberedande skiss.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Anmärkning till artikeln »Om linsformeln och dess härledning».

I citerade artikel av läroverksadjunkten hr C. E. Blom (denna tidskr., 1 årg., sid. 230—234) finnes ett felslut, som ej bör lämnas obeaktat, ehuru det hittills tycks ha undgått läsarnas uppmärksamhet.

Hans bevis för att en central stråle från en lysande punkt på huvudaxeln till en sfärisk begränsningsyta mellan två olika medier brytes till en punkt på axeln, som ligger längre bort från den sfäriska ytans mittpunkt än vad fallet är med en randstråle, vilar på förutsättningen att man om förhållandet $AP : BP$ (se fig. 1, anf. arb.) vet, att det minskar, när P närmar sig O. Uppenbarligen minskar därvid AP, men hur det samtidigt går med BP kan man ej på förhand säga, *då det just är punkten B:s förflyttning som skall bestämmas.* Med förutsättningen faller sedan själva beviset.

Enär således den av B. betonade »åskådligheten» i hans framställning av linsformeln blott förleder honom till en förhastad slutsats, synes mig intet skäl föreligga att sätta hans metod framför min redan tidigare (1 årg., sid. 173—174) införda, som ej kräver några extra konstruktionslinjer, nästan genast leder till den för brytningen vid ena linsytan gällande slutformeln

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r},$$

som därför ej behöver särskilt inläras, och slutligen har förtjänsten att kunna tillämpas även på den sfäriska spegeln (se min uppsats härom i tidskr:s 2 årg., sid. 47).

Skulle det angränsande mediet ej vara luft, föreställer n i nyssnämnda formel naturligtvis brytningsindex vid ljusets gång från detta medium (I) till linsmediet (II) och beräknas alltså ur ekv. $n = n_2 : n_1$, där n_1 och n_2 betyda brytningsindices vid ljusets gång från luft till resp. medier (I) och (II). Analogt vid den andra linsytan.

Härvid följer jag den pedagogiska visdomsregeln att börja med det enkla fallet (linsen omgiven av luft) och först sedan — om det visar sig nödvändigt — taga det mera sammansatta (olika medier kring linsen). B. däremot går från det generella (tjock lins, tre brytningsindices) till det speciella (tunn lins, en brytningsindex), vilket torde vara så mycket mindre lämpligt, som på skolstadiet endast i rena undantagsfall linsen förutsättes tjock eller omgiven av något annat ämne än luft.

I motsats mot B:s påstående om de senare årens studentproblem har nämligen — såvitt jag kunna finna — blott en enda gång (v. t. 1917) förekommit ett, där man icke kan använda linsformeln utan att taga hänsyn till tjockleken. Emellertid kan detta problem lösas på olika sätt utan att betraktas såsom ett fall av en tjock lins (se t. ex. Hagströms edition av fysiska studentuppgifter); vederbörandes mening torde väl ock snarare hava varit att locka examinanden till en självständig behandling av uppgiften än giva honom ett bekvämt tillfälle att stoppa in den i ett visst formelfack.

Lund i jan. 1920.

Gust. Forsström.

*

Det av lektor Forsström i förestående artikel påpekade felet i min uppsats om linsformeln[1] är uppenbart.[2] Lektor F:s påstående, att beviset för brytningen i en sfärisk gränsyta härmed skulle falla, är emellertid oriktigt. Beviset

[1] Denna tidskr. 1917—18, sid. 230.

[2] Det har smugit sig in i min framställning från v. Oettingers »Die Schule der Physik», s. 371.

och uppsatsen i övrigt beröras ej på minsta sätt härav. Man har endast att stryka meningen: »Närmar sig *P* mot *O* o. s. v.» (sid. 232) och sedan läsa uppsatsen i dess sammanhang.

Lektor F. utdömer fullständigt min behandling av linsproblemet och menar, att jag börjat i galen ända i det att jag försyndar mig mot den »pedagogiska visdomsregeln» om »det enkla och det sammansatta».

För det första synes det mig olämpligt att slaviskt underkasta sig den anförda »visdomsregeln». För det andra börjar jag ju ej alls med något »sammansatt» fall utan med det enklast tänkbara, *en sfärisk gränsyta mellan två olika medier*, och deducerar en generellt giltig formel för detta enkla fall. Med hjälp av denna formel (ekv. 2, sid. 232) kan man följa ett centralt strålknippe genom ett centrerat linssystem vilket som helst och får således bl. a. med dess hjälp utan vidare den vanliga linsformeln.

Såväl egen som medlärares erfarenhet har visat, att detta tillvägagångssätt ej är för lärjungarna svårfattligare och knappast tager mera tid[1] än det vanliga, där man inskränker sig till en tunn lins. Det ger mera, och i den händelse man skulle vilja verifiera teckenreglerna, är det avsevärt lättare att göra detta, när det gäller brytningen i en gränsyta, än när det gäller brytningen i *två* (den tunna linsen). Ingen lärare torde ge sig tid att göra detta i det senare fallet.

Då vidare samma teckenregler för avstånden gälla för ekv. 2 som för de vanliga lins- och spegelformlerna, och den visat sig lätt att minnas, har jag ej tvekat att låta lärjungarna inlära densamma. Även rätt komplicerade brytningsproblem vålla nu ingen svårighet, och uppgifter sådana som n:r 277, 317, 320 b i Rydbergs studentuppgifter samt n:r 7 H. T. 1919 lösas omedelbart med hjälp av densamma även av klassens medelmåttor, vilket enligt min erfarenhet ej är fallet, om de äro hänvisade till direkt kalkyl. Och vilken lärare vill ej ge sina lärjungar en så

[1] Återvinns för övrigt tillfullo vid problemräkningen.

god utrustning som möjligt! En sådan behövs sannerligen numera, när en tydlig — och för övrigt mycket beklaglig — tendens till försvåring av de fysikaliska studentuppgifterna visat sig, och många av lärjungarna nödvändigt behöva kvalificerade betyg för att kunna göra sig gällande i konkurrensen om platser vid våra högskolor.

Av det sagda torde framgå, att ekv. 2 ej är av artificiell natur; lektor F:s varning för »bekväma formelfack» anser jag därför i detta fall ej vara på sin plats.

Vad slutligen själva bevismetoden för ekv. 2 beträffar, vilken ej heller undgår lektor F:s kritik, så är den enligt mitt förmenande av underordnad betydelse. Det kan vara en smaksak, vilken väg man här följer. Jag anförde i min uppsats en liten variation av det vanliga beviset, för den händelse den möjligen skulle intressera någon. Att sätta denna framför lektor F:s hade jag så mycket mindre anledning till som lektor F:s uppsats då ej var mig bekant.[1]

Nya elementarskolan i april 1920.

C. E. Blom.

Än en gång uppgift n:r 4 i höstterminens fysikaliska studentskrivningar 1919.

Då det knappast kan vara att vänta, att problemets uppställare skall besvära sig med att besvara märkets *M—r* många och långa funderingar, vill jag söka stå honom till tjänst med en liten utredning.

Reservoaren med röret upp till märket 50 befinner sig vid en viss temperatur, antag $(172+x)°$. Kvicksilvervolymen vid $+32°$ ovan märket 50 kan betecknas med $122a$. Då graderingen göres på glasröret, och sedvanliga approximationer obetingat äro tillåtna, enär det endast är fråga om en korrektionsterm, fås, om man tänker sig alltsammans uppvärmt till $(172+x)°$, direkt ekvationen:

$$122a\,[1+\alpha(140+x)] = (122+x)\,a\,[1+\beta(140+x)],$$

[1] Manuskriptet inlämnades till red. i nov. 1917.

och $$122 + x = 122[1 + (\alpha - \beta)(140 + x)],$$

varav $$x = \frac{140 \cdot 122(\alpha - \beta)}{1 - 122(\alpha - \beta)},$$

eller approximativt

$$x = 140 \cdot 122(\alpha - \beta) + 140[122(\alpha - \beta)]^2.$$

Beräkning med de givna värdena på α och β ger

$$x = 2{,}630 + 0{,}049,$$

således *svar:* temperaturen var 174°,68.

Det är otvivelaktigt fullt allvar med uppgiften att termometern skall anses visa rätt, då hela instrumentet har samma temperatur. Däremot är det ett misstag att föreställa sig, att mellanrummet vid 0° mellan närliggande delstreck är konstant, hela skalan igenom.

Betecknas volymen vid 0° av reservoaren och fram till nollpunkten med V; volymen vid samma temp. inuti röret mellan delstrecken 0 och t med v_t, fås ekv.:

$$V(1 + \alpha t) = (V + v_t)(1 + \beta t),$$

varav $$\frac{v_t}{V} = \frac{(\alpha - \beta)t}{1 + \beta t},$$

eller approximativt $$\frac{v_t}{V} = (\alpha - \beta)t - \beta(\alpha - \beta)t^2.$$

Sättes här $t = 175$, fås med de givna värdena på α och β korrektionstermens värde till $-0{,}000127$. Vilket innebär, att om termometerröret är invändigt fullkomligt cylindriskt, α och β konstanta, och avståndet vid 0° mellan 0° och 1° tas som enhet för en gradering med lika skaldelar, så kommer termometern vid $+175°$ att visa fel på 0°,8.

Att följa *M—r* på hans övriga exkursioner erbjuder föga intresse. Därför till sist blott en liten fråga eller par. Vad tjänar det till att med svett och möda (räknemaskin och 7-ställiga tabeller!) konstruera fram oriktiga »lösningar» till en uppgift? Vet man ej ändå, att ett problem kan felbehandlas på många, till och med oändligt många, olika

sätt? Och kunna ej skolpojkar hitta på dumheter nog själva, utan att man behöver gå dem till handa med fingerade exempel? *E. Solander.*

*

I ovanstående genmäle börjar hr Solander med att ånyo utveckla det som jag benämnt den »klassiska» metoden för frågans lösning, varvid han sätter alla delstrecken av samma volym, visserligen ej hela skalan utefter, men dock så, att han benämner volymen från 50 till 172° 122a och från 50 till $(172+x)°$ $(122+x)a$. Sedan utvecklar han det som jag redan förut påpekat, att man för att lösa problemet egentligen borde göra delstrecken olika, en fråga vars utredande går långt utöver en abiturients förmåga, åtminstone under studentskrivningen.

Så långt äro vi alldeles ense, i det att även han tyckes inse, att man i motsatt fall kan få fel på nära 1°, under det att uppgiften ger bestämningar på 0°,1.

Det är således endast hans direkta frågor som behöva ett svar: Jo, hr S., det tjänar till ganska mycket att påpeka, att en uppgift är alldeles olämplig för abiturienterna, då de kunna på densamma giva lösningar, som *från deras ståndpunkt* äro fullständigt riktiga, fastän de för hr S. framstå som felaktiga, och även detta delvis med orätt. Jag tror knappt, att ens hr S. själv skulle våga underkänna en sådan lösning, som den som ger svaret 175°,5, vilken, åtminstone teoretiskt, är *riktigare* än den klassiska, då den ej förutsätter några approximationer, om vilkas inverkan varken lärjungen eller ens hr Solander kan uttala något bestämt, utan blott att delstrecken äro av lika volym, vilket ju i allmänhet är fallet vid en termometer. Och att benämna detta »dumheter»; därför att det ej stämmer med vedertagna metoder, är en sak som får stå för hr Solanders egen räkning. Ej heller torde det vara alldeles utan nytta att för eleven påpeka, till vilka orimligheter det kan leda att i otid använda approximationsmetoder, om vilka han dock fått lära sig, att de i allmänhet få användas. *M—r.*

Angående vårterminens fysiska studentskrivningar.

För första gången på länge hava i år de fysiska studentskrivningsämnena varit från pedagogisk synpunkt oklanderliga. Denna gång är det emellertid ett av dem, som från vetenskaplig synpunkt är oriktigt.

Det 7.de ämnet börjar nämligen sålunda: »En elektrisk kokapparat innehåller 1,24 kg. vatten. Den inkopplas mellan tvänne ledningar tillhörande ett ledningsnät, mellan vilka spänningen hålles konstant och lika med 220 volt, och tager då en ström av 4,5 amp. För att uppvärma vattnet från 17° till 60° åtgår en tid av 3 minuter...»

Med kännedom om den Jouleska konstanten 0,24 grkal. pr wattsekund kan envar uträkna, att under de tre minuterna tillföras

$$220 \cdot 4{,}5 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 0{,}24 = 42\,768 \text{ grkal.}$$

Härmed uppvärmes 1,24 kg. vatten 43 grader, vartill erfordras

$$1\,240 \cdot 43 = 53\,320 \text{ grkal.}$$

Kokapparaten har sålunda en verkningsgrad av 124,7 %.

Var köpas dessa, verkligt goda, pannor? *M—r.*

*

För redaktionen har lektor E. Hernqvist påpekat, att, även det 3:e ämnet lider av en liknande, ehuru ej så graverande, oegentlighet, i det att, om glasets liniära utvidgningskoefficient därstädes uträknas, densamma fås till $21 \cdot 10^{-6}$, under det att dess verkliga värde är c:a $9 \cdot 10^{-6}$.

Vår Prisuppgift för årgången 1919—20.

Uppgiften lydde: *Talet 1 001 001 001 001 är divisibelt med 1 111. Angiv en så generell regel som möjligt, av vilken ovanstående är ett specialfall.*

Trenne försök till lösningar hava inkommit, vart för sig med vissa förtjänster. I tvenne av dem förekomma dock så pass svåra fel, att Red. ej kan anse dem värda att prisbelönas. Det tredje däremot är fullt korrekt; men då generaliseringen i detsamma är långt ifrån uttömmande, och dessutom dess framställningsform är tämligen oklar, så hava vi ej ansett det böra belönas med mer än andra priset.

Redaktionen har sålunda beslutit, att första och tredje prisen detta år ej komma att utdelas, men har tilldelat *andra priset:*

W. Oswald. Grosse Männer,

åt lärjungen i Ring III B av *Högre Reallärоverket i Göteborg*

Ole Albert Lamm.

Manuskriptet är för omarbetning efter Red:s anvisningar återsänt till författaren, och skall i nästa häfte intagas i omarbetad form.

De båda övriga hava återställts till författarna jämte Redaktionens anmärkningar.

Red.

Matematiska uppgifter.

67) För en reguliär 7-hörning gäller att $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{s}$, där d_1 och d_2 äro två olika diagonaler, och s är sidan.

A. N—m.

68) P är en godtycklig punkt på en parabel. O vertex. Visa att sinus för den vinkel tangenten i P bildar med PO alltid är mindre än $^1/_3$. *S. B—n.*

69) Rötterna till ekvationen $x^2+ax+b=0$ kallas α och β. Angiv den andragradsekvation som har rötterna $\frac{1}{\alpha^3}+1$ och $\frac{1}{\beta^3}-1$. *M—r.*

70) *ABC* är en triangel, *CM* dess median. Om triangeln *CAM* vrides kring *CM*, till dess att *A* kommer rätt över *BC*, så blir, om v betecknar vinkeln mellan planen,

$$\cos v=\frac{a^2+3b^2-c^2}{3a^2+b^2-c^2}=\frac{4m^2-a^2+b^2}{4m^2+a^2-b^2}.$$ *C. H.*

71) I en triangel vilken som helst är alltid

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{v_a}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{v_b}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{v_c},$$

då v_a, v_b, v_c äro bissektriserna. *C. H.*

72) Bissektriserna till vinklarna i en fyrhörning bilda alltid en inskrivbar fyrhörning; och om den förstnämnda fyrhörningen är inskrivbar, så äro den andras diagonaler vinkelräta mot varandra.

Lösningar till uppgifterna i h. 2. 1919—20.

55) *I en cirkel med medelpunkten O och radien r äro två punkter P och P_1 tagna på samma diameter och på samma sida om O samt så, att $OP\cdot OP_1=r^2$. Om genom P drages en godtycklig korda APB, så är PP_1 en av bissektriserna till AP_1B.*

Enär $OA^2=OP\cdot OP_1$, så är OA tangent till cirkeln PAP_1 och på samma sätt är OB tangent till cirkeln PBP_1. Härav följer:

$$\sphericalangle OP_1A=OAP=OBP=OP_1B.$$

Löst av *G. B—k, C. H.* och *W. J.*

56) *I varje fyrsidig figur är summan av sidornas kvadrater lika med summan av diagonalernas kvadrater, ökad med 4 gånger kvadraten på den linje som förenar diagonalernas mittpunkter.*

Kalla fyrhörningens sidor DA, AB, BC, CD i ordning a, b, c, d. AC:s och BD:s mittpunkter L och P resp., linjerna AC, BD, BL, DL och PL för k, m, x, y, p resp. Då fås enligt mediansatsen:

$$\left.\begin{aligned} b^2+c^2&=\frac{k^2}{2}+2x^2\\ a^2+d^2&=\frac{k^2}{2}+2y^2\\ x^2+y^2&=\frac{m^2}{2}+2p^2\end{aligned}\right\}$$

varur satsen lätt fås genom elimination av x och y.

G. B—k.

Även löst av *W. J.* och *C. H.*

57) *I varje tetraeder är summan av kanternas kvadrater 4 gånger så stor som summan av kvadraterna på de tre linjer som förbinda mittpunkterna av motstående kanter.*

Kalla tre i ett plan belägna kanter a, b och c, med mittpunkterna A, B, C resp., och deras motstående kanter a_1, b_1, c_1 med mittpunkterna A_1, B_1, C_1 resp. Då är ABA_1B_1 en parallellogram med sidorna $\frac{c}{2}$ och $\frac{c_1}{2}$ samt diagonalerna AA_1 och BB_1. Användes då satsen, att summan av kvadraterna på diagonalerna i en parallellogram är lika med summan av kvadraterna på sidorna, så fås

$\overline{AA_1}^2+\overline{BB_1}^2=\frac{1}{2}(c^2+c_1^2)$, och genom cyklisk permutation

$\overline{BB_1}^2+\overline{CC_1}^2=\frac{1}{2}(a^2+a_1^2)$, och

$\overline{CC_1}^2+\overline{AA_1}^2=\frac{1}{2}(b^2+b_1^2)$, varur satsen omedelbart följer genom addition. *C. H.*

(Övriga lösningar oriktiga så till vida att insändarna blott hava bevisat satsen för en reguliär tetraeder.)

58) *Sätt* $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, . . ., $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ *och sök* $\lim_{x=\infty} x_n$.

I. Sättes $y_1=x_1$, $y_2=\sqrt{2-x_1}$, $y_3=\sqrt{2-x_2}$ . . . $y_n=\sqrt{2-x_{n-1}}$, så äro y_1, y_2, y_3 . . . y_n sidorna i den i enhetscirkeln inskrivna 4-sidingen, 8-sidingen, 16-sidingen . . . 2^{n+1}-sidingen. Således är lim $y_n=0$.

Vi hava då:

$$\begin{cases} x_n^2=2+x_{n-1} \\ y_n^2=2-x_{n-1} \end{cases}$$

således $$x_n^2+y_n^2=4.$$

Då nu lim $y_n=0$, så är lim $x_n=2$ (då -2 är orimligt).

Anm. Man kan även säga, att x_n är den näst längsta diagonalen i en 2^{n+1}-siding.

II. Sättes det sökta limes$=l$, så hava vi:

$$l=\lim x_n=\lim\sqrt{2+x_{n-1}}=\sqrt{2+\lim x_{n-1}}=\sqrt{2+l},$$

varav $l=2$ (då -1 är orimligt). *X. och C. H.*

III. $$2-x_\nu=2-\sqrt{2+x_{\nu-1}}=\frac{2-x_{\nu-1}}{2+\sqrt{2+x_{\nu-1}}}<\frac{2-x_{\nu-1}}{2}.$$

Vi hava således:

$$2-x_n<\frac{2-x_{n-1}}{2}<\frac{2-x_{n-2}}{4}<\ldots<\frac{2-x_1}{2^{n-1}},$$

där alla leden äro positiva. Således $\lim(2-x_n)=0$.

X., W. J.

59) *Av de tre sträckorna* a, b, c *kan bildas en egentlig triangel, om och endast om ekvationen*

$$a^2x^2+(a^2+b^2-c^2)x+b^2=0$$

har imaginära rötter.

I. a, b, c äro positiva tal. Om man sätter $p=\frac{a+b+c}{2}$, kan man uttrycka villkoren för att det skall finnas en egentlig triangel med sidolängderna a, b, c med

$$p-a>0,\ p-b>0,\ p-c>0.$$

Diskriminanten D till den givna ekvationen befinnes vara $$-16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

1) Är triangeln egentlig, måste $D<0$, och ekvationen har imaginära rötter.

2) Har ekv. imaginära rötter, måste

$$p(p-a)(p-b)(p-c)>0.$$

Första faktorn är positiv, av de tre återstående måste antingen ingen eller två vara negativa. I första fallet är triangeln egentlig.

Antag i senare fallet $a>p$, $b>p$

$$\therefore\ a+b>2p=a+b+c \text{ d. v. s. } 0>c.$$

Detta fall kan således icke inträda för positiva a, b, c och satsen är bevisad. Om den givna ekv. betecknas $f(x)=0$, har ekv. $f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=0$ samma egenskap, om α, β, γ, δ reella tal, och $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

II. Man kan geometriskt åskådliggöra satsen på följande sätt.

Då a, b, c äro positiva tal, kan man sätta $\frac{a}{\sigma}=\frac{b}{\tau}=\frac{c}{1}$, där σ, τ äro positiva tal, som för en egentlig triangel uppfylla villkoren $-\sigma+\tau+1>0$, $\sigma-\tau+1>0$ och $\sigma+\tau-1>0$. Om man nu uppfattar σ, τ som koordinaterna för en punkt hänförd till ett rätvinkligt koordinatsystem, representerar alltså en punkt inom första kvadranten antingen oändligt många likformiga, egentliga trianglar eller också ingen egentlig triangel. Sätter man det lineära uttrycket $p\sigma+q\tau+1=f(\sigma,\tau)$ och intecknar linjen $f(\sigma,\tau)=0$, är som bekant $f(\sigma,\tau)>0$ för alla punkter på ena sidan och $f(\sigma,\tau)<0$ för alla punkter på andra sidan om denna linje. Man ser då lätt, att de punkter, som motsvara egentliga trianglar ligga *inom* det på fig. 1 streckade området, som begränsas af $f_1=-\sigma+\tau+1=0$, $f_2=\sigma-\tau+1=0$ och $f_3=\sigma+\tau-1=0$, ty i $(1,1)$ äro alla tre lineära uttrycken positiva. Man ser vidare, att produkten $f_1\cdot f_2\cdot f_3$ är posi-

tiv inom det streckade området, men negativ i de övriga tre områdena, i vilka positiva kvadranten indelas av de tre linjer, på vilka en av faktorerna försvinner. Man kommer nämligen från det streckade området till vart och ett av de tre andra utan att passera mer än en begränsningslinje, varvid en och endast en faktor i produkten byter tecken. Villkoret $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 > 0$ är således för positiva σ- och τ-värden ekvivalent med $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0$. Nu är diskriminanten till ekv.

$$\sigma^2 x^2 + (\sigma^2 + \tau^2 - 1)x + \tau^2 = 0$$

just $-(\sigma+\tau+1) f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$, d. v. s., då ju $\sigma+\tau+1 > 0$ för $\sigma, \tau > 0$,

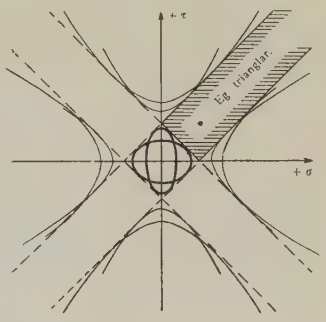


Fig. 1.

ekvationen har reella eller imaginära rötter allt efter som $f_1 f_2 f_3 \leqq 0$ resp. > 0, med andra ord motsvarande triangel är oeg. resp. egentlig.

III. Om man i ekvationen $\sigma^2 x^2 + (\sigma^2 + \tau^2 - 1)x + \tau^2 = 0$ ger x ett bestämt värde och uppfattar σ, τ som löpande koordinater, representerar ekvationen geometriskt ett kägelsnitt. Ekvationen för detta kägelsnitt i normalform är

$$\frac{\sigma^2}{\frac{1}{x+1}} + \frac{\tau^2}{x+1} = 1.$$

Inbegreppet av dessa kägelsnitt för olika x-värden utgör alltså »skaran»

$$\frac{\sigma^2}{\alpha} + \frac{\tau^2}{1-\alpha} = 1.$$

$\alpha = \dfrac{1}{x+1}$; $x = \dfrac{1}{\alpha} - 1$; x och α äro samtidigt reella (imaginära). För $0 < \alpha < 1$ d. v. s. $x > 0$ erhållas ellipser, för $\alpha > 1$ och $\alpha < 0$ d. v. s. $x < 0$ erhållas hyperbler; $x = 0, \infty$ ger $\tau^2 = 0$ resp. $\sigma^2 = 0$. För reella x erhållas alltså reella kägelsnitt, för imaginära x imaginära kägelsnitt.

Innebörden av ex. 59 kan således uttryckas så: *Genom varje punkt i första kvadranten, som motsvarar en oeg. triangel går åtminstone ett reellt kägelsnitt i vår skara, medan de punkter i samma kvadrant, som motsvara egentliga trianglar, icke ligga på något reellt kägelsnitt i skaran.* Detta är evident, om man observerar, att vår skara består av de kägelsnitt, som tangera de fyra linjerna $\pm\sigma \pm\tau + 1 = 0$. Se fig.!

X.

(Även löst av *G. B—k.*)

60) *Beräkna n:te derivatan av* $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1-x^2}}$, *då* $x^2<1$ *och* $n>1$.

Yttre kvadratroten kan väljas positiv. Vi hava

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$$

och $$g(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$$

för $x>0$, men $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})$ för $x<0$.

Nu är $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ \ldots\ (\frac{1}{2}-n+1)(1+x)^{1/2-n} =$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2}(1+x)^{1/2-n},$$

och $\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{1/2} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2^n}(1-x)^{1/2-n}$, båda-dera för $n>1$.

Man har således för $n>1$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2^n\sqrt{2}}\left\{(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^n} - \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^n}\right\}$$

$$g^{(n)}x = \pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2^n\sqrt{2}}\left\{(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^n} + \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^n}\right\}$$

allteftersom $x \gtrless 0$.

Anm. Funktionerna i fråga förtydligast bäst genom uppritande av kurvan $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1-x^2}}$ eller $x^2 = 2y^2 - y^4$.

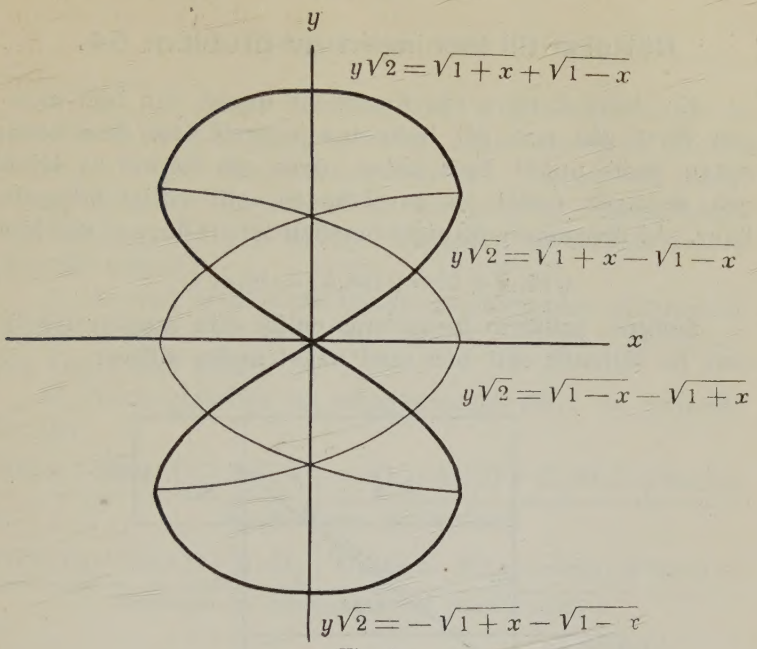


Fig. 2.

Den erhålles genom att addera de ordinator som svara mot samma x i parablerna $y\sqrt{2} = \sqrt{1-x}$ [d. v. s. $2y^2 = 1-x$] och $y\sqrt{2} = \sqrt{1+x}$ [d. v. s. $2y^2 = 1+x$]. Kurvan består av de 4 bågarna $y\sqrt{2} = \pm\sqrt{1+x} \pm \sqrt{1-x}$, och n:te derivatan är fullt bestämd i varje punkt, utom där $x = 0$. Här beror det på längs vilken gren man verkställer deriveringen. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ har ingen bestämd derivata i origo. Däremot finnas derivator till höger och vänster:

$f'(x)$ är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ till höger och $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ till vänster.

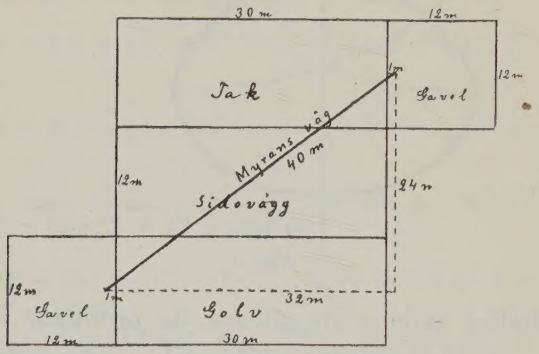
X.

Rättelse till lösningen av problem 54.

En ännu kortare väg finnes för flugan, om hon nämgen först går ned till bottnen och snett över dess hörn, sedan snett uppåt över sidan, över ena hörnet av taket och slutligen nedåt på gavelväggen, allt enligt bifogade figur. Av densamma framgår omedelbart att flugans väg blir

$$\sqrt{10{,}2^2+2^2}=\sqrt{108{,}04}=10{,}394.$$

Samma problem formuleras enligt min mening trevligare på följande sätt och med något andra siffror:



En sal är 30 meter lång, 12 meter bred och 12 meter hög. På ena gavelväggen lika långt från båda långsidorna och 1 meter från golvet sitter en myra. Hur lång är den kortaste väg, som myran behöver gå för att komma till motsatta gavelväggen till en punkt, som ligger lika långt från de båda långsidorna och 1 meter från taket?

Med dessa siffror får man, som synes av figuren, en egyptisk triangel med kateterna 24 och 32 meter och myrans väg således 40 meter. Myror kunna ju ej heller i allmänhet flyga. — Uppgiften plägar i hög grad roa elever.

Uppsala 22 april 1920.

Magnus Lemoine.

Frågor och svar.

Fråga: I denna tidskrift 1917, s. 103—106, finnes en särdeles intressant uppsats »Om några satser ur valensläran», av KNUT HOLMBERG publicerad. Då ett och annat i uppsatsen är, åtminstone för den mindre erfarne, något svårfattligt, vore jag mycket förbunden att erhålla svar å följande frågor:

1) Av vad orsak skall minsta gemensamma dividenden till koefficienterna tagas? Hur erhålles siffran 8 för H_2SO_4 och H_2O? (sid. 104).

2) Huru gestaltar sig resonemanget vid t. ex. följande formler:

$$\underbrace{5H_2O_2+2KMnO_4+3H_2SO_4=5O_2+8H_2O+K_2SO_4+2MnSO_4}$$

(bestämning av vätesuperoxid)

$$\underbrace{(H_2C_2O_4+2H_2O)+MnO_2+H_2SO_4=2CO_2+4H_2O+MnSO_4}$$

(bestämning av mangansuperoxid medelst oxalsyra)

»*Abonnent.*»

Svar: På 1:a frågan får undertecknad avgiva följande svar: I en kemisk reaktionsformel äro ju alla koefficienterna hela tal, följaktligen kan 2 och 5 ej direkt jämföras, då det ena ej går jämnt upp i det andra, varför man sålunda måste taga minsta gemensamma dividenden, som ju har egenskap att vara multipel av dem båda. Varför erhålles koefficienten 8 för H_2SO_4 och H_2O?; frågar »Abonnent» vidare. Svar: På grund av valensförändringarna hava vi ju erhållit följ. bestämningar:

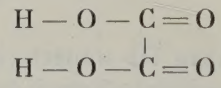
$$2KMnO_4+x.H_2SO_4+10FeSO_4=2MnSO_4+K_2SO_4+$$
$$+5\,Fe_2(SO_4)_3+yH_2O.$$

Koefficienterna x och y för H_2SO_4 och H_2O bestämmas nu på följ. enkla sätt. I högra membrum finnas 18 SO_4-joner, varför lika många sådana måste finnas å det vänstra, följaktligen koefficienten för H_2SO_4 måste bli 8. I vänstra ledet

finnes nu 8 H_2, således bör det även i det högra finnas 8, sålunda koefficienten för $H_2O = 8$.

Vad den andra frågan vidkommer, får jag då först hänvisa till den del av uppsatsen, där jag säger: »Då valensförändringar *kunna* försiggå för så väl o. s. v». Man kan likvisst även nu komma på det klara med berörda sakförhållande. I det av »Abonnent» anförda exemplet förlorar mangan 10 valenser. Då ej något ämne här kan oxideras, bliva 10 syreatomer fria (vilka ju kunnat höja ett annat ämne med 10 valenser, om det varit förhanden) men nu sluta sig samman till molekyler d. v. s. $5O_2$. Många andra exempel, analoga med »abonnents» kunna anföras, exempelvis $MnO_2 + 4HCl = MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2$.

Slutligen övergår jag till den 3:e frågan, där svaret även ter sig ganska enkelt. Mangan förlorar här 2 valenser. Varför blir då icke O_2 fritt som i föregående exempel? Svaret på denna fråga får man, blott man observerar skillnaden i bindningarna i föreningarna $H_2C_2O_4$ och CO_2. Strukturformeln för $H_2C_2O_4$ är ju



för CO_2 åter

Varje kolatom i oxalsyran har tre av sina frändskapsenheter bundna vid syre, däremot i koldioxiden har kolet fyra frändskapsenheter bundna vid syre, så att O_2 på så sätt ej kan bli fritt, utan blir fortfarande bundet. Dylika exempel äro ganska vanliga inom den organiska kemien.

Knut Holmberg.